# Ich bin (k)ein Lügner!

Beispiele, Analysen und Lösungen logischer Paradoxien.

Diplom-Informatiker
Peter Weigel

Januar 2010

Peter Weigel. Ich bin (k)ein Lügner! Beispiele, Analysen und Lösungen logischer Paradoxien. www.antinomien.de, Halle/Saale, Januar 2010.

Können Sie diese Frage ohne zu lügen mit ‚nein' beantworten?

Ja? Dann behaupten Sie, dass Sie mit „nein" antworten und haben somit gelogen, da sie offensichtlich mit „ja" antworteten.

Also Nein? Wäre diese Antwort keine Lüge, so würden Sie ohne zu lügen mit „nein" antworten. Es würde also genau das Gefragte eintreten und Sie müssten (weil Sie ja nicht lügen) mit „ja" antworten.

Somit können Sie die Frage nicht ohne zu lügen mit „nein" beantworten. *Ich bin kein Lügner*, wenn ich daher die Frage wahrheitsgemäß mit „nein" beantworte.

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

## Vorwort

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

das Phänomen der logischen Paradoxien bzw. Antinomien wird bereits seit Jahrtausenden ausgiebig analysiert. Warum also ein weiteres Buch?

Wenn Sie die verschiedenen Analysen genauer betrachten, werden Sie feststellen, dass das Phänomen der logischen Paradoxien stets nur partiell betrachtet wird. Speziell die Herstellung einer Verbindung der Antinomie der natürlichen Sprache und der Mengenlehre mit dem Halteproblem der Turingmaschinen, den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen und dem Reinen Existenzbeweis fehlen völlig. Aber genau diese Verbindungen liefern uns völlig neue Einblicke in das Phänomen. Die meisten Publikationen zu diesem Thema umfassen eine kurze Vorstellung des Phänomens und liefern anschließend einen ausgiebig diskutierten Lösungsvorschlag. Wir werden diese Tradition der willkürlichen Lösungen nicht fortsetzen, sondern anhand zahlreicher Beispiele und Analysen belegen, dass es keine zufrieden stellende Lösung geben kann.

In diesem Sinne unterscheidet sich das vorliegende Werk grundlegend von anderen Publikationen und wird Ihnen daher sehr hilfreich beim Verständnis logischer Paradoxien sein.

Mit freundlichem Gruß

Peter Weigel

## Begriffsklärung

Paradoxien sind kontraintuitive Aussagen, also Aussagen die unserer Intuition bzw. unserer naiven Vorstellung widersprechen. Sie treten besonders häufig in realitätsfernen, relativ neuen, unerforschten und ungefestigten Theorien auf. Sie machen uns auf Fehler der zugrunde liegenden Theorie oder unserer Intuition aufmerksam und müssen daher ernst genommen werden.

Logische Paradoxien sind auf einen logischen Widerspruch (weder wahr noch falsch) ausgerichtet und durch eine negierend-zirkelhafte Selbstbezüglichkeit gekennzeichnet. Es handelt sich (in der Regel) um Aussagen, die sich selbst referenzieren, dabei ihren eigenen Wahrheitswert in ihre Bewertung mit einbeziehen und diese Einbeziehung negierender Art ist. Logische Paradoxien werden im Deutschen auch als Antinomien bezeichnet. Im Englischen werden die beiden Begriffe „Paradoxie“ und „Antinomie“ jedoch weitestgehend synonym verwendet werden.

Das tückische an logischen Paradoxien ist, dass das Vorliegen eines zirkelhaften Selbstbezuges unter Umständen gut versteckt wurde, abhängig vom Beobachtungsstandort ist oder aber nur unter bestimmten (nicht sofort erkenntlichen) Bedingungen auftritt! Ein und die selbe Aussage kann dann von verschiedenen Standorten aus betrachtet bzw. unter verschiedenen Rahmenbedingungen entweder konsistent oder paradox sein.

Das ganze Leben besteht aus Entscheidungen. Doch manchmal ist es uns leider nicht möglich eine Entscheidung zu treffen. Ursachen hierfür sind in der Regel der Mangel an Verständnis inkl. dem Spezialfall des Missverständnisses („Ich kann die Frage nicht beantworten, weil ich sie nicht verstehe bzw. es sich für mich um keine gültige Frage handelt.“), der Mangel an Wissen („Ich kann die Frage nicht beantworten, weil ich zu wenig Informationen erhalten habe.“) und der Mangel an Fähigkeiten („Ich kann die Frage nicht beantworten, weil meine Möglichkeiten zur

Wissensermittlung bzw. -ableitung nicht ausreichen.“). Die Antinomien offenbaren nun überraschenderweise eine weitere Ursache, mit der wir wenig Erfahrung besitzen und die uns daher merkwürdig-paradox erscheint: Der Mangel in der Fähigkeit zur Selbstbewertung („Ich kann die Frage nicht beantworten, weil ich sonst lügen müsste oder ich zumindest nicht sicherstellen kann, dass die Antwort korrekt ist.“).

## Vorschau

Im Folgenden werden wir viele Beispiele logischer Paradoxien kennen lernen und analysieren. Als Einstieg beginnen wir mit den paradoxen Handlungsvorschriften (Hinweisschild, Fremder, Rabattkarte, Spontanität, Rosaroter Elefant). Dannach tauchen wir tiefer ab: Im Kontext der Temporalen Paradoxien werden wir das Zeitreiseparadoxon und das Zwillingsparadoxon untersuchen.

Anschließend wenden wir uns den Paradoxien der Unendlichkeit zu. Gegenstand unserer Untersuchungen werden hier die Paradoxie des Mächtigkeitsvergleiches und das zweite Cantorsche Diagonalverfahren sein. Zum Abschluss des Kapitels lernen wir eine Veranschaulichung beider „Paradoxien“ in Form der Geschichte vom Hotel mit unendlich vielen Betten kennen.

Und nun wird es ernst: Wir kommen zu den Paradoxien der Mengenlehre, werden die wichtigsten paradoxen Mengen kennen lernen (Menge aller Ordinalzahlen, Russelsche Menge, Zwickersche Menge, Potenzmenge der Menge aller Mengen) und dabei das grundlegende Problem der Paradoxien identifizieren: Hinreichend mächtige Theorien sind entweder unvollständig oder widersprüchlich.

Und dann kommen die echten Antinomien, die logischen Paradoxien der natürlichen Sprache, an die Reihe. Wir werden die Antinomie des Lügners und Wahrsagers kurz betrachten und die Antinomie von Grelling, Richard bzw. Berry kennen lernen. Eine ausgiebige Analyse der Antinomien erfolgt jedoch erst in einem späteren Kapitel.

Und jetzt der Schock: Auch in der Mathematik gibt es logische Paradoxien. Natürlich nicht als Widerspruch sondern in gelöster Form mit interessanten, überraschenden Folgen. Speziell betrachten wir hier das Halteproblem für Turingmaschinen, die beiden Gödelschen Unvollständigkeitssätze und das Phänomen der unkonstruktiven Beweisverfahren am Beispiel des reinen Existenzbeweises.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir nun noch ausführlich paradoxe Geschichten (Barbier, Selbstmörder, Galgen, Gewinnmaximierung, Unerwartete Überraschung) und decken auch hier die Strukturen der logischen Paradoxien auf bzw. zeigen, dass es sich lediglich um Schein-Paradoxien handelt.

So und nun werden die Antinomien von allen Seiten beleuchtet und analysiert. Speziell die Isomorphie verschiedener Theorien bzw. Analogien verschiedener Antinomien, die syntaktischen Strukturen der Paradoxien, die Arten der Referenzierung (Einbettung, Quinierung, Nutzung vorhandener Namensräume, Definition eigener Namen, Konvertierung relativer Bezeichner) als auch der Zusammenhang zwischen Wahrsager, Lügner und deren Negationen werden genauestens untersucht.

Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten (Verbot zirkelhafter Selbstbezüglichkeit, Semantisches Spezialergebnis, Semantische Typisierung) werden vorgestellt und im Zusammenhang mit dem Phänomen des verstärkten Lügners betrachtet. Die Untersuchungen schließen wir mit der Erkenntnis ab, dass eine Theorie niemals gleichzeitig vollständig und widerspruchsfrei sein kann - es somit keine zufrieden stellende Lösung der logischen Paradoxie geben kann, eine Beschäftigung mit der Thematik aber dennoch nützlich und wichtig ist.

KAPITEL 1

# Paradoxe Handlungsvorschriften

Handlungsvorschriften sind Aufforderungen, die befolgt oder missachtet werden können. Wir gehen intuitiv davon aus, dass es möglich ist jede sinnvolle Handlungsvorschrift auch zu befolgen oder zu missachten. Dass es Gegenbeispiele für diese naive Annahme gibt, ist auf den ersten Blick schon etwas paradox.

Die im Folgenden vorgestellten Handlungsvorschriften sind ausnahmslos Formen der Lügner-Antinomie. Die zirkelhaft-negierende Selbstbezüglichkeit der Handlungsvorschriften ist dabei in der Regel indirekt und entsteht erst durch Interpretation der entsprechenden Vorschriften.

## 1. Hinweisschild

Auf einem Schild steht „Dieses Hinweisschild bitte nicht beachten.“

In dem Moment, wo man diese Aufforderung liest, hat man sie bereits missachtet.

## 2. Fremder

Ein Fremder rät: „Nehmen Sie nie einen Rat von Fremden an!“

Wenn man diesen Rat befolgt, hat man ihn schon missachtet.

## 3. Rabattkarte

An der Kasse eines Einkaufszentrums steht geschrieben: „Bitte zeigen Sie Ihre Rabattkarte unaufgefordert vor.“

Dieser Aufforderung kann man nie nachkommen, denn wenn man die Rabattkarte unaufgefordert vorzeigt, hat man entsprechend der Aufforderung gehandelt.

## 4. Spontanität

Eine Mutter fordert ihre Tochter auf: „Sei doch mal spontan."

Spontan sein bedeutet etwas unaufgefordert zu tun. Wenn die Tochter etwas unaufgefordert tut, kommt sie der Aufforderung der Mutter nach und war somit nicht spontan.

## 5. Rosaroter Elefant

„Bitte versuchen Sie sich keinen rosaroten Elefanten vorzustellen."

In dem Moment, wo man diese Aufforderung liest und versucht den Sinn zu verstehen, hat man sie in der Regel bereits missachtet.

KAPITEL 2

# Temporale Paradoxien

Temporale Paradoxien sind paradoxe Phänomene, die mit den Gesetze von Raum und Zeit im Zusammenhang stehen. Sie sind ein beliebtes Element von Science-Fiction-Filmen. Hierbei führt unter anderem die Annahme der Möglichkeit von Zeitreisen (sowohl in die Zukunft, als auch in die Vergangenheit) zu teilweise paradoxen Phänomenen. Auch Folgerungen aus der Einsteinschen Relativitätstheorie sind als sehr gewöhnungsbedürftig und somit scheinbar-paradox einzustufen. Die Einsteinsche Paradoxie (Zwillingsparadoxon) gehört jedoch nicht zu den logischen Paradoxien und wird hier lediglich der Vollständigkeit halber mit betrachtet.

## 1. Zeitreiseparadoxon

Es ist bisher noch niemandem gelungen eine Zeitreise zu unternehmen. Wir erkennen aber keinen offensichtlichen Grund, der dieses Vorhaben scheitern lassen könnte. Wir gehen nun einmal davon aus, dass Zeitreisen möglich wären:

Gegeben sei eine beliebige Person $P$. Angenommen diese Person würde eine Zeitreise in die Vergangenheit unternehmen. Dann könnte sie ihre eigene Zeitreise verhindern (z.B. durch Sabotage des Baus der Zeitmaschine). Dadurch würde sie aber nicht in die Vergangenheit gelangen, da die Zeitmaschine ja defekt ist. In diesem Fall könnte sie die Sabotage aber gar nicht durchführen. Dann ist die Zeitmaschine aber nicht defekt und sie könnte ja doch in die Vergangenheit reisen. . .um den Bau der Zeitmaschine zu sabotieren. . .Dann ist die Zeitmaschine aber nicht defekt und sie könnte ja doch in die Vergangenheit reisen…um den Bau der Zeitmaschine zu sabotieren…

.

Diese Betrachtung bildet offensichtlich eine Paradoxie, ist aber so unpräzise formuliert, dass weder klar ist, welche Voraussetzungen genau getroffen werden, noch was nun eigentlich den Widerspruch bildet. Daher werden wir den Beweis nun exakt führen:

Wir setzen voraus, dass eine Person einen eindeutigen in Zeit und Raum stetigen Lebenslauf besitzt, das heißt zu jeder Zeit seines Lebens befindet sich eine Person in einer bestimmten Zeit und an einem bestimmten Ort, wobei die Veränderung des Ortes und der Zeit in kleinen Lebenszeitabständen ebenfalls klein sei (stetig). Angenommen das Reisen in die Vergangenheit wäre möglich. Dann gäbe es eine Person $P$ mit eindeutigem Lebenslauf, die Zeitreisen unternehmen könnte. Dann könnte sie dies' zu einem bestimmten Lebenszeitpunkt $t_1$ tun und ihre eigene Zeitreise verhindern (z.B. durch Sabotage des Baus der Zeitmaschine). Diese Verhinderung würde zu einem bestimmten Lebenszeitpunkt $t_2$ erfolgen. Dann könnte die Person $P$ aber nicht zum Lebenszeitpunkt $t_1$ in die Vergangenheit reisen und würde sich zum Lebenszeitpunkt $t_2$ an einem anderen Ort und zu einer anderen Zeit befinden. Das steht aber im Widerspruch zur Eindeutigkeit des Lebenslaufes dieser Person $P$ zum Lebenszeitpunkt $t_2$.

.

Somit sind Zeitreisen in die Vergangenheit in einem Modell mit eindeutigem Lebenslauf (für Personen) nicht möglich. Es gibt allerdings Modelle, die durchaus mehrere Lebensläufe zulassen (z.B. durch Parallelwelten, verschiedene Zeitdimensionen, ...).

Außerdem ist nicht ausgeschlossen, dass man die Vergangenheit beobachten kann, da hier eine Beeinflussung ausgeschlossen ist.

Die Paradoxie entsteht dadurch, dass man fälschlicherweise die Möglichkeit der Zeitreise nicht rechtzeitig ausschließt und dadurch paradoxe Folgerungen erhält (Person reist - Person reist nicht - Person reist - ...). Eine analoge Betrachtung ist für das Reisen in die Zukunft möglich, da man hier ja Informationen erhalten kann, die in der eigenen Zeit angewendet verheerende Folgen haben können. Hier ist also sogar eine Beobachtung ausgeschlossen.

Vielleicht sind Zeitreisen aber tatsächlich nicht möglich und die ganze theoretische Betrachtung völlig sinnlos ...

## 2. Zwillingsparadoxon

Es waren einmal zwei Zwillinge im Alter von 30 Jahren. Einer der beiden stieg in ein Raumschiff um mit einer Geschwindigkeit von 80% der Lichtgeschwindigkeit zu einem 20 Lichtjahre entfernt liegenden Planeten zu fliegen und wieder umzukehren. Unter Vernachlässigung der Beschleunigung ergibt sich eine Gesamtreisezeit von 50 Jahren ($20/0.8 = 25$ und $25 * 2 = 50$). Als der Raumfahrer die Erde wieder erreichte, war der auf dieser zurückgebliebene bereits 80 Jahre alt ($30 + 50 = 80$). Im Gegensatz dazu waren gemäß der Einsteinschen Relativitätstheorie aufgrund der Zeitdialation für den Raumfahrer erst 30 Jahre vergangen ($50 * \sqrt{1 - 0.8^2} = 30$), sein biologisches Alter betrug also nur 60 Jahre.

Ist es gemäß Relativitätstheorie durch „schnelles Bewegen“ also möglich den biologischen Alterungsprozess zu verlangsamen oder gar zu stoppen?

.

Dieses Phänomen scheint paradox, ist aber eine ganz normale Folge der Einsteinschen Relativitätstheorie. Der Effekt wurde wissenschaftlich bereits nachgewiesen und ist somit keineswegs eine theoretische Spielerei, sondern real. Dass uns das Phänomen so paradox erscheint, liegt am Erfahrungsmangel. Wir bewegen uns mit deutlich geringeren Geschwindigkeiten durch die Raum-Zeit, so dass die Einsteinschen Effekte vernachlässigt werden können und uns die Gesetze von Raum und Zeit deutlich einfacher erscheinen (vgl. Newtonsche Axiome), als sie in Wahrheit sind.

Im Übrigen hatte der Raumfahrer nichts von dem verlangsamten Alterungsprozess, denn für ihn waren tatsächlich erst 30 Jahre vergangen.

Wäre er mit Lichtgeschwindigkeit geflogen, wäre er überhaupt nicht gealtert. Allerdings bräuchten wir unendlich viel Energie um ihn auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen. Diese Unternehmung würde somit deutlich an den beschränkten Energieressourcen scheitern.

KAPITEL 3

# Paradoxien der Unendlichkeit

Im Zusammenhang mit der Unendlichkeit entstehen einige auf den ersten Blick paradoxe Folgerungen. Diese Folgerungen erscheinen uns so paradox, da wir bei der intuitiven Bewertung der Unendlichkeit nur auf Erfahrungen mit der Endlichkeit zurückgreifen können. Die Unendlichkeit unterscheidet sich aber grundlegend von der Endlichkeit, so dass unsere Erfahrung unbrauchbar ist und zu Trugschlüssen führen kann.

Die Paradoxie der Mächtigkeitsvergleiche ist keine logische Paradoxie und an dieser Stelle lediglich der Vollständigkeit halber mit aufgeführt. Gleiches scheint für das Cantorsche Diagonalverfahren zu gelten. Wir werden dem Verfahren jedoch später im Zusammenhang mit echten logischen Paradoxien erneut begegnen und somit eines besseren belehrt werden. Die zum Abschluss aufgeführte Paradoxie des Hilberthotels ist lediglich eine anschauliche Aufbereitung der Paradoxien der Unendlichkeit und somit im strengen Sinne keine eigene Paradoxie.

## 1. Paradoxie der Mächtigkeitsvergleiche

Gegeben sei die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Aus dieser Menge suchen wir nun alle geraden Zahlen heraus und fassen diese zu einer neuen Menge $\mathbb{G}$ = „Die Menge der geraden natürlichen Zahlen“ zusammen. Offensichtlich enthält $\mathbb{G}$ halb so viele Elemente wie $\mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ neben den geraden noch die ungeraden Zahlen enthält. Es gilt also $||\mathbb{G}|| = ||\mathbb{N}||/2$ und somit $||\mathbb{G}|| < ||\mathbb{N}||$. Andererseits lässt sich eine Paarbildung zwischen beiden Mengen finden, das heißt jedem Element aus $\mathbb{G}$ lässt sich in eineindeutiger Weise ein Element aus $\mathbb{N}$ zuordnen: $g = 2 * n$. Somit enthalten aber beide Mengen gleichviel Elemente, es gilt also $||\mathbb{G}|| = ||\mathbb{N}||$. Widerspruch?!

.

Galileo Galilei entdeckte die Paradoxie der Mächtigkeitsvergleiche zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der Quadratzahlen im Jahr 1638 ([**Ga38**]). Die Tatsache, dass eine unendliche Menge gleichmächtig zu einer echten Teilmenge sein kann, deutete er jedoch als Paradoxon und als Beleg dafür, dass sich unendliche Mengen hinsichtlich ihrer Größe nicht sinnvoll vergleichen lassen. Erst *Georg Cantor* löste diese Paradoxie auf. Heute wird dieses Phänomen als charakteristische Eigenschaft unendlicher Mengen angesehen.

.

Um die Paradoxie dieses Beweises identifizieren und beseitigen zu können, müssen wir Mächtigkeiten unendlicher Mengen vergleichen können. Dazu sollten wir uns erst einmal vergegenwärtigen, wie wir die Mächtigkeiten endlicher Mengen vergleichen:

*Es war einmal ein Schäfer. Dieser hatte viele Schafe. Jeden Morgen brachte er seine Schafe auf die Weide, und jeden Abend brachte er sie wieder zurück in den Stall. Selbstverständlich muss der Schäfer am Abend sicherstellen, dass kein Schaf verloren gegangen ist bzw. er muss überprüfen, ob im Laufe des Tages Schafe, zum Beispiel durch Geburt, hinzugekommen sind. Da er niemals die Schule besuchte, konnte er nur bis 10 zählen. Sein Vater, ebenfalls Schäfer, hatte das gleiche Problem. Er kannte aber einen Trick, den ihm wiederum sein Vater beigebracht hatte. Nach diesem Verfahren lässt der Schäfer am Morgen die Schafe einzeln die Weide betreten. Für jedes Schaf legt er einen Stein auf einen Haufen. Somit hat er am Ende genau so viele Steine* *angehäuft, wie er Schafe besitzt, ohne zu wissen, wie viel Schafe bzw. Steine es tatsächlich sind. Am Abend lässt er die Schafe nur einzeln die Weide wieder verlassen. Dabei nimmt er für jedes Schaf einen Stein vom Haufen. Bleiben Steine übrig, so sind am Tage Schafe verloren gegangen. Bleiben Schafe übrig, so sind Schafe hinzugekommen. Bleiben weder Schafe noch Steine übrig, so verlassen am Abend genau so viele Schafe die Weide wie sie am Morgen betreten haben.*

.

Auf Grundlage der gerade getätigten Vorbetrachtung definieren wir nun die Mächtigkeit von Mengen wie folgt:

Es seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Es gilt $||A|| \leq ||B||$ genau dann, wenn es eine Paarbildung der Elemente aus $A$ mit den Elementen aus $B$ gibt, so dass jedem Element aus $A$ ein Partner aus $B$ zugeordnet werden kann. In der Menge $B$ dürfen dabei Singles übrig bleiben. Es gilt $||A|| = ||B||$ genau dann, wenn $||A|| \leq ||B||$ und $||A|| \geq ||B||$ bzw. wenn es eine vollständige Paarbildung (= Paarbildung ohne Übrigbleiben von Singles) zwischen $A$ und $B$ gibt. Es gilt $||A|| < ||B||$ genau dann, wenn $||A|| \leq ||B||$ und $||A|| \neq ||B||$ bzw. wenn bei jeder Paarbildung zwischen den Elementen von $A$ und $B$ Singles in der Menge $B$ übrig bleiben.[1]

.

[1] Wir haben hier die Gleichmächtigkeit sowohl über die Relation $\leq$, als auch über die vollständige Paarbildung definiert. Die Gleichwertigkeit beider Definitionen bedarf noch eines Beweises. Wir verzichten an dieser Stelle auf diesen Beweis und verweisen auf den *Äquivalenzsatz* von Dedekind, Bernstein oder Schröder. Wir verzichten auch auf den Beweis, dass für $\leq$ alle Gesetzmäßigkeiten üblicher Größenrelationen (Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität, Totalität/Vergleichbarkeit) gelten. Bezüglich der Totalität bzw. Vergleichbarkeit sei auf den *Vergleichbarkeitssatz* von Zermelo verwiesen.

Der Mächtigkeitsvergleich auf Grundlage dieser Definition ist sowohl für endliche als auch für unendliche Mengen möglich und sinnvoll. Nun muss allerdings jede bisher als allgemeingültig angesehene Folgerung kritisch geprüft werden, ob diese ggf. nur für endliche Mengen Gültigkeit besitzt, denn: Aus dem Übrigbleiben von Singles bei der Paarbildung der Elemente einer Menge $A$ mit den Elementen einer Menge $B$ kann bei unendlichen Mengen im Gegensatz zu endlichen Mengen nicht auf die Ungleichmächtigkeit geschlossen werden, da es ja eine andere, erfolgreichere Paarbildungsvorschrift geben könnte.

Existiert für zwei endliche Mengen $A$ und $B$ eine vollständige Paarbildung, so ist jede Paarbildung zwischen $A$ und $B$ vollständig.

Existiert für zwei endliche Mengen $A$ und $B$ eine Paarbildung, bei der Singles in der Menge $B$ übrig bleiben, so gilt diese Eigenschaft für sämtliche Paarbildungen zwischen $A$ und $B$ und es gilt daher $||A|| < ||B||$.

Sei $A$ eine echte Teilmenge der endlichen Menge $B$ so kann als Paarbildung o.B.d.A. die Identität verwendet werden (jedes Element aus $A$ ist auch ein Element von $B$ und wird mit sich selbst gepaart). Offensichtlich bleiben hier alle nicht in $A$ enthaltenen Elemente als Singles übrig. Eine echte Teilmenge einer endlichen Menge ist also wahrhaftig von echt kleinerer Mächtigkeit - bei endlichen Mengen.

.

Für unendliche Mengen gilt diese Folgerung nicht, da hier nicht o.B.d.A. die Identität als Zeuge herangezogen werden kann. Mehr noch: Eine Menge ist genau dann unendlich, wenn sie gleichmächtig zu einer echten Teilmenge ist. Die Paradoxie ist eine charakteristische Eigenschaft unendlicher Mengen.

## 2. Zweites Cantorsche Diagonalverfahren

Mithilfe der Paarbildung lassen sich übrigens noch viele weitere gleichmächtige Mengen finden. Ob nun die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen oder alles Aufschreibbare (die natürliche Sprache). Alle diese Mengen besitzen die gleiche Mächtigkeit. Die vorangehenden Betrachtungen des Unendlichen zeigen also, dass unendliche Mengen stets gleichgroß scheinen. Der Schein trügt jedoch, denn es gibt wahrhaft mächtigere Mengen:

.

Gegeben sei eine beliebige Menge $M$ mit der dazugehörigen Potenzmenge $P(M) = \{\text{Menge aller Teilmengen von M}\}$.

Jedem Element $m \in M$ lässt sich umkehrbar eindeutig das Element $\{m\} \in P(M)$ zuordnet. Somit ist $M$ gleichmächtig zu einer Teilmenge von $P(M)$. Es gilt daher

$$||M|| \leq ||P(M)||$$

Gegeben sei nun zusätzlich eine beliebige Abbildung $\phi$ von $M$ in $P(M)$.

Mit Hilfe dieser Abbildung „konstruieren“ wir die Menge

$$D = \{m \in M : m \notin \phi(m)\}$$

Diese Diagonalmenge $D$ enthält ein Element $m$ aus $M$, genau dann wenn es nicht in der Menge $\phi(m)$ vorkommt. Offensichtlich gilt $D \subseteq M$ und somit $D \in P(M)$.

Wegen $m \in D \iff m \notin \phi(m)$, unterscheidet sich die Menge $D$ an mindestens einer Stelle von jedem Bild der Abbildung $\phi$. Sei zum Beispiel $M = \mathbb{N}$ und $7 \in \phi(7)$, dann gilt $7 \notin D$ und somit $\phi(7) \neq D$. Damit ist $D$ zwar ein Element von $P(M)$, wird aber durch $\phi$ keinem Element aus $M$ zugeordnet und bleibt daher bei der durch $\phi$ beschriebenen Paarbildung als Single übrig. Die Paarbildung ist nicht vollständig.

.

Georg Cantor fand diesen Beweis, der neben der Potenzmenge auch für die Menge der reelen Zahlen anwendbar ist, im Jahr 1890 ([**Ca91**]). Er entdeckte jedoch bereits 16 Jahre eher, im Jahr 1874, einen gültigen Beweis für die reellen Zahlen ([**Ca74**]). Dabei wird die Diagonalzahl auf eine vollkommen andere Weise konstruiert, so dass der Beweis nicht auf Potenzmengen übertragbar ist. Außerdem schränkte Georg Cantor die Abbildung $\phi$ damals ein: Die Abbildung $\phi$ war lediglich eine Abzählung sämtlicher algebraischer Zahlen. Damit bewies er, durch Präsentation der Diagonalzahl, die Existenz einer nicht-algebraische und somit transzendente reelle Zahl. Zum damaligen Zeitpunkt war die Existenz solcher Zahlen lediglich vermutet worden. Georg Cantors Entdeckung lautete also:

Es gibt transzendente reelle Zahlen.

.

Die Fortsetzung des beweises war eigentlich nur ein „Abfallprodukt“: Da $\phi$ aber beliebig (ohne Einschränkungen) gewählt wurde, kann es überhaupt keine vollständige Paarbildung zwischen $M$ und $P(M)$ geben, da für jede vermeintlich vollständige Paarbildung eine Diagonalmenge präsentiert werden kann. Es gilt also $||M|| \neq ||P(M)||$ und somit $||M|| < ||P(M)||$.
Sei nun $M = \mathbb{N}$, dann gilt

$$||\mathbb{N}|| < ||P(\mathbb{N})||$$

Sei $M = P(\mathbb{N})$, dann gilt

$$||P(\mathbb{N})|| < ||P(P(\mathbb{N}))||$$

Sei

$$P^i(\mathbb{N}) = \underbrace{P(P(\ldots P(}_{i \text{ mal}}\mathbb{N})\ldots))$$

und

$$P^* = P(\mathbb{N}) \cup P^2(\mathbb{N}) \cup P^3(\mathbb{N}) \cup \ldots$$

dann gilt

$$||\mathbb{N}|| < ||P(\mathbb{N})|| < ||P^2(\mathbb{N})|| < \ldots < ||P^*(\mathbb{N})|| < ||P(P^*(\mathbb{N}))|| < \ldots$$

Die Hierarchie der Mächtigkeiten ist wahrhaftig unendlich!

## 3. Hilberthotel

*Es war einmal ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern. Jedes Zimmer hatte eine natürliche Zahl als Zimmernummer. Eines Abends, es war Hochsaison und somit alle Zimmer belegt, kam ein Wanderer des Weges und suchte eine Unterkunft für die Nacht. Der Wanderer wurde sofort mit der Begründung abgewiesen, dass alle Zimmer belegt seien. Nun war der Wanderer aber Mathematiker. Daher kam ihm eine Idee: Es sollten alle Gäste in das Zimmer mit der nächsthöheren Nummer umziehen. Dadurch würde jeder Gast auch weiterhin ein eigenes Zimmer haben und es wäre nun das Zimmer mit der Nummer* 1 *frei. Gesagt, getan. Die Gäste zogen um und der Wanderer bekam das Zimmer mit der Nummer* 1.

*Das Hotel mit den abzählbar unendlich vielen Zimmern erlangte, dank der Begebenheit mit dem Wanderer, eine solche Berühmtheit, dass es ab diesem Zeitpunkt stets ausgebucht war. Dennoch können kleinere (endliche) Reisegruppen problemlos untergebracht werden. Nun reiste eines Tages ein Reisebus mit unendlich vielen Hotelgästen an. Der Hotelbesitzer war im ersten Moment ratlos, funktionierte doch das bisher angewendete Verfahren nicht mehr. Zum Glück hatte er sich mittlerweile über die Besonderheiten unendlicher Mengen informiert und kannte eine Lösung: Ein Gast des Zimmers $n$ sollte demnach in das Zimmer $2 * n$ umziehen.*

*Dadurch würden die bisherigen Gäste ausschließlich Zimmer mit geraden Zimmernummern belegen und die unendlich vielen ungeraden Zimmer wären für die neuen Gäste frei.*

*Aufgrund des Erfolges des Hotels mit den abzählbar unendlich vielen Zimmern, wurden unendlich viele Hotels mit unendlich vielen Zimmern gebaut. Alle diese Hotels waren stets komplett belegt. Nun begab es sich, dass alle Hotels, bis auf eines, wegen Modernisierungsmaßnahmen zeitweilig geschlossen werden mussten. Alle Gäste der unendlich vielen Hotels sollten nun in das eine noch verbliebene Hotel umziehen. Dazu wurde die Zimmernummerierung gemäß dem ersten Cantorschen Diagonalverfahrens geändert. Jedes Zimmer besaß nun eine aus zwei natürlichen Zahlen bestehende Zimmernummer. Der Gast aus Zimmer $n$ des Hotels $m$ zog nun in das Zimmer mit der Nummer $(n, m)$ um.*

*Der Mensch erschloss mittlerweile viele neue Welten und drang in neue bis dahin unbekannte Raum-Zeit-Dimensionen vor. An diesen unendlich mal unendlich mal unendlich mal unendlich mal ... Orten baute er natürlich ebenfalls unendlich viele Hotels mit unendlich vielen Betten. Um die unendlich hohen Baukosten und die Bauzeit möglichst gering zu halten, wurden jedoch billigere Materialien verwendet. Und nun kam was kommen musste: Während der Hochsaison (sämtliche Hotels waren belegt) wurde ein Baumangel festgestellt, der eine sofortige Schließung sämtlicher Hotels (bis auf das Original) notwendig machte. Zum Glück konnten alle Gäste in dem einen übrig gebliebenen Hotel untergebracht werden.*

*Nun gab es aber auch ein Hotel der nächsten Generation, in dem als Zimmernummern reelle Zahlen verwendet wurden. Es gab somit genau so viele Zimmer wie reelle Zahlen.*

*Konnten auch hier alle, oder wenigstens die meisten, Gäste in das Hotel mit den abzählbar unendlich vielen Zimmern umquartiert werden? Die Antwort liefert das zweite Cantorsche Diagonalverfahren und lautet: Nein!*

KAPITEL 4

# Paradoxien der Mengenlehre

Logische Paradoxien in der natürlichen Sprache sind schon seit tausenden Jahren bekannt. Die durch die Sprachwissenschaftler durchgeführten Versuche, die Paradoxien zu beseitigen, wurden von den Mathematikern stets belächelt. Und Plötzlich gab es Antinomien auch in der Mathematik und stürzte diese in eine Grundlagenkrise. . .

Dabei wurde die Mengenlehre von *Georg Cantor* lediglich mit dem Ziel der Untersuchung der Unendlichkeit entwickelt. Dass sie sich zu einer der wichtigsten mathematischen Theorien, ja sogar zur Grundlage der gesamten Mathematik, entwickeln würde, war am Anfang nicht abzusehen. Umso schwerwiegender war daher die Entdeckung der Paradoxien der Mengenlehre, also die Entdeckung von scheinbar korrekten, aber dennoch in sich widersprüchlichen Mengen. Diese Paradoxien zeigten, dass die *Cantorsche Mengenlehre* Widersprüche enthielt und somit wertlos war, da sich in einer widersprüchlichen Theorie jede Aussage beweisen lässt.

Einige Mengen, wie die Potenzmenge der Menge aller Mengen oder die Menge aller Ordinalzahlen, waren bereits *Georg Cantor* seit 1895 bekannt ([**Ca95**]). Die *Russelsche Menge* wurde 1901 von *Bertrand Russell* entdeckt. Die *Zwickersche Menge* geht auf einen Herrn *Zwicker* zurück, wurde 1993 erstmals publiziert und hierbei als alternative Idee zur Konstruktion der Diagonalmenge beim zweiten Cantorschen Diagonalverfahren verwendet ([**Sm93**]).

## 1. Menge aller Ordinalzahlen

Wir axiomatisieren Ordinalzahlen wie folgt:

(1) Es seien $a$, $b$ und $c$ drei Ordinalzahlen. Dann gilt $a \leq a$ (Reflexivität), $(a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b$ (Antisymmetrie), $(a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$ (Transitivität) und $a \leq b \vee b \leq a$ (Vergleichbarkeit, Totalität).

(2) Ist $M$ eine Menge von Ordinalzahlen, dann gibt es eine kleinste Ordinalzahl $m$, die größer[2] ist als alle Ordinalzahlen aus $M$.

.

Gemäß dieser Axiomatisierung gibt es jenseits „aller Ordinalzahlen" der leeren Menge $\emptyset$ eine kleinste Ordinalzahl, diese bezeichnen wir mit 0. Jenseits der Ordinalzahlen der Menge $\{0\}$ gibt es die Ordinalzahl 1. Jenseits der Ordinalzahlen der Menge $\{1\}$ oder der Menge $\{0, 1\}$ gibt es die Ordinalzahl 2. Es folgen die Ordinalzahlen 3, 4, 5, 6, 7, ... Jenseits der Menge aller *endlichen Ordinalzahlen* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ gibt es entsprechend der Axiomatisierung eine kleinste Ordinalzahl, die größer ist als jede endliche Ordinalzahl, diese bezeichnen wir mit $\omega$. Es handelt sich dabei um die kleinste *transfinite Ordinalzahl.* Danach kommen $\omega$+1, $\omega$+2, $\omega$+3, ..., $2\omega$, $2\omega$+1, $2\omega$+2, ..., $3\omega$, ..., $4\omega$, ..., $\omega^2$, $\omega^2$+1, ..., $\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1$, ..., $\omega^2+2\omega$, ..., $\omega^3$, ..., $\omega^\omega$, ..., $\omega^{\omega^\omega}$, ..., $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, ..., $\varepsilon$, ...

.

Betrachten wir nun die Menge aller Ordinalzahlen. Gemäß Definition der Ordinalzahlen gibt es eine Ordinalzahl jenseits dieser Menge. Diese Ordinalzahl ist größer als alle Ordinalzahlen. Widerspruch.

---

[2] Es gilt $a < b \leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b$.

## 2. Russelsche Menge

Wir definieren die Russelsche Menge $R$ wie folgt: „Die Russelsche Menge soll alle Mengen enthalten, die sich selbst nicht enthalten.“. Es stellt sich nun die Frage, ob $R$ sich selbst enthält oder nicht: Angenommen $R$ enthält sich selbst, so muss $R$ der Bedingung für das Enthaltensein in $R$ genügen, $R$ darf sich demnach nicht selbst enthalten. Widerspruch. Also enthält $R$ sich nicht selbst. Dann genügt $R$ aber der Bedingung für das Enthaltensein in $R$ und ist somit in $R$ enthalten. Widerspruch. Somit gilt weder $R \in R$ noch $R \notin R$. Widerspruch. (Die Russelsche Menge ist eine Diagonalisierung gegen sämtliche Mengen und somit eine weitere Anwendung des zweiten Cantorschen Diagonalverfahrens.)

## 3. Zwickersche Menge

Sei $M$ eine beliebige Menge. Ein *Abstieg von $M$* ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Mengen $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $\ldots$ mit $M_0 = M$, und $M_{i+1} \in M_i$. Die Menge $M$ besitzt eine endliche Tiefe, wenn alle möglichen Abstiege endlich sind, jeder Abstieg also zwangsläufig nach endlich vielen Schritten in der leeren Menge $\emptyset$ endet. Die Menge aller Mengen endlicher Tiefe nennen wir Zwickersche Menge und bezeichnen diese mit $Z$. Es stellt sich nun die Frage, ob $Z$ selbst eine Menge endlicher Tiefe ist: Jeder Abstieg von $Z$ beginnt mit der Menge $Z$. Anschließend folgt eine Menge aus $Z$. Da $Z$ ausschließlich Mengen endlicher Tiefe enthält, sind die Abstiege endlich und lediglich einen Schritt länger, als die Abstiege der in $Z$ enthaltenen Mengen. Damit ist $Z$ eine Menge endlicher Tiefe. Dann gilt aber $Z \in Z$. Folglich gibt es einen Abstieg $Z \to Z \to Z \to \ldots$ und $Z$ ist doch keine Menge endlicher Tiefe. Widerspruch.

## 4. Potenzmenge der Menge aller Mengen

Die größte aller Mengen ist offensichtlich die *Menge aller Dinge* $ALL_D$, da keine Menge mehr Dinge enthalten kann, als diese Menge. In dieser Menge ist die *Menge aller Mengen* $ALL_M$ enthalten. Es gilt also $||ALL_M|| \leq ||ALL_D||$. Offensichtlich gibt es aber zu jedem Ding $x$ der Menge $ALL_D$ die Menge $\{x\}$ in der Menge $ALL_M$. Damit ist die Menge $ALL_D$ gleichmächtig zu einer Teilmenge der Menge $ALL_M$. Es gilt somit auch $||ALL_D|| \leq ||ALL_M||$ und daher $||ALL_M|| = ||ALL_D||$.

Zur Menge $ALL_M$ gibt es nun auch die Potenzmenge $P(ALL_M)$. Gemäß dem vorhin geführten Beweis, ist $P(ALL_M)$ echt mächtiger als $ALL_M$, obwohl doch $ALL_M$ eigentlich die mächtigste Menge sein sollte?!

.

Damit führt die Annahme der Existenz der $ALL_M$-Menge und deren Potenzmenge zu Widersprüchen. Was haben wir also falsch gemacht? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir dieses Ergebnis interpretieren. Dabei müssen wir jedoch streng zwischen Mengenmodellen (konkrete gedankliche Ausprägungen einer Mengentheorie) und Mengentheorien (Bauplan eines Mengenmodells) unterscheiden:

(1) Jedes Mengenmodell ist unvollständig, da es (von außen betrachtet) einige intuitiv gültige Mengen, wie $P(ALL_M)$, $R$ oder $Z$ nicht enthält. Zu jedem Mengenmodell $M$ gibt es ein Mengenmodell $M'$, das alle Mengen aus $M$ und noch einige mehr enthält. $M$ entpuppt sich bei der Betrachtung aus $M'$ heraus als unvollständig.

(2) Jede Mengentheorie, die die Existenz von $P(ALL_M)$, $R$ oder $Z$ erzwingt ist widersprüchlich.[3]

[3] Damit ist unsere naive Mengenlehre widersprüchlich: Wir erlauben die Menge aller Mengen und gleichzeitig die Potenzmenge jeder beliebigen Menge.

(3) Jede widerspruchsfreie Mengentheorie, ist unvollständig derart, dass die Existenz intuitiv gültiger Mengen wie $P(ALL_M)$, $R$ oder $Z$ nicht gesichert (ggf. sogar verboten) wird.

.

Wegen der Existenz der Potenzmenge $P(M)$ zu jeder Menge $M$, gibt es keine größte gesicherte Mächtigkeitsstufe. Jenseits der gesicherten Mächtigkeitsstufen, gibt es gemäß Punkt (3) stets auch ungesicherte Mächtigkeitsstufen und darunter stets auch eine kleinste ungesicherte: Sei $\Phi$ eine Sammlung von Mengenkonstruktionen, also eine Sammlung von Verfahren zur Konstruktion immer größerer Mengen und sei $ALL_M$ die Menge aller damit konstruierbaren Mengen (= Schnitt aller möglichen Mengenmodelle). Dann sind $P(ALL_M)$, $P(P(ALL_M))$, ... noch größere Mengen, die durch $\Phi$ nicht konstruiert bzw. deren Existenz nicht garantiert werden können. $\Phi$ ist unvollständig und damit auch jede Mengentheorie, die nur die Mengenkonstruktionen aus $\Phi$ sichert.

*Hinreichend ausdrucksstarke, widerspruchsfreie Theorien sind nicht vollständig formalisierbar.*

Diese Unvollständigkeit hat nichts mit dem Ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz zu tun, der sich mit der Nichtbeweisbarkeit von Aussagen in axiomatisierbaren (und somit formalisierbaren) Theorien beschäftigt: Gödel zeigte mit seinem Vollständigkeitssatz, dass für die Prädikatenlogik 1. Stufe (PL/1) ein vollständigen Beweißkalkül existiert und somit sämtliche wahre Aussagen auch beweisbar sind. Dagegen zeigte sein erster Unvollständigkeitssatz, dass es für die Prädikatenlogik 2. Stufe (PL/2) kein solches Beweißkalkül geben kann und somit für die betreffenden, in der PL/2 formalisierbaren, Theorien zwangsläufig unbeweisbare wahre Aussagen existieren.

Jeder Gesamtheit von Mengenkonstruktionen ist unvollständig, da es von außen betrachtet nicht konstruierbare Mengen gibt und dies eine mögliche Erweiterung der Mengenkonstruktionsverfahren erkennen lässt. Die Untersuchungen zur Kontinuumshypothese haben gezeigt, dass es auch ungesicherte Mächtigkeitsstufen zwischen den gesicherten Mächtigkeitsstufen geben kann. Diese sind hier aber nicht gemeint, machen aber auf weitere Unvollständigkeiten aufmerksam.

Mit *hinreichend ausdrucksstark* ist u.a. eine die Mengenlehre enthaltende Theorie gemeint. Es gibt scheinbar auch deutlich einfachere Theorien, wie z.B. die Theorie der Ordinalzahlen (mit ausschließlich der Relation „$\leq$“, also ohne Addition, Multiplikation, Potenzierung). Hier muss man sich allerdings bewusst machen, dass diese Theorie in ihren Axiomen auf sämtliche Mengenkonstruktionen zurückgreift („Ist $M$ eine Menge von Ordinalzahlen ...“) und somit die komplette Mengenlehre beinhaltet. Eine vollständige Axiomatisierung der Theorie der Ordinalzahlen umfasst somit zwangsläufig auch die (unvollständigen) Axiome der Mengenlehre.

KAPITEL 5

# Paradoxien der natürlichen Sprache

Paradoxien der Unendlichkeit entstehen an der Stelle, wo wir mathematische Erkenntnisse über die Unendlichkeit mit unserer Erfahrung vergleichen. Da wir aber nur Erfahrungen mit dem Endlichen haben, da alles in der Natur endlich ist (Materie ist nicht beliebig teilbar, Geschwindigkeit ist durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt, Universum besitzt eine endliche Ausdehnung, ...) unterliegen wir der Versuchung die Andersartigkeit des Unendlichen als etwas Paradoxes bzw. Unnatürliches anzusehen. Es war zum großen Teil Cantors Leistung der Unendlichkeit einen sinnvollen Platz in der Mathematik zu sichern. Daher werden diese Paradoxien schon lange nicht mehr als paradox angesehen, sondern als spezielle Erscheinungen des Unendlichen.

Im Gegensatz zu den Paradoxien der Unendlichkeit, die weitestgehend als gelöst angesehen werden können, existieren die Antinomien auch weiterhin. Diese Paradoxien existieren ebenfalls nur, weil wir Probleme damit haben die Andersartigkeit von Selbstbezüglichkeiten zu erkennen. Schuld ist wieder die mangelnde Erfahrung, da alles in der Natur und fast alles in der Mathematik induktiv, sukzessiv, rekursiv, stufenweise, ... aufgebaut ist.

Die Logische Paradoxie tritt hier in ihrer Reinform auf: Antinomien der natürlichen Sprache sind auf einen logischen Widerspruch (weder wahr noch falsch) ausgerichtet und durch eine negierend-zirkelhafte Selbstbezüglichkeit gekennzeichnet. Es handelt sich (in der Regel) um Aussagen, die sich selbst referenzieren, dabei ihren eigenen Wahrheitswert in ihre Bewertung mit einbeziehen und diese Einbeziehung negierender Art ist.

Dass selbstbezügliche Sätze keine Gefahr darstellen, sofern keine Zirkelhaftigkeit vorliegt, zeigen unter anderem folgende Beispiele: Der Satz „Dieser Satz besteht aus sieben Wörtern." besteht aus sechs Wörtern und ist somit eindeutig falsch. Der Satz „Dieser Satz besteht nicht aus sieben Wörtern." besteht aus sieben Wörtern und ist somit ebenfalls eindeutig falsch.

Wir werden im Folgenden die Antinomie des Lügners und des Wahrsagers kennen lernen. Zu einem späteren Zeitpunkt folgen dann noch entsprechende Abwandlungen, wie der kontingente Lügner oder der verstärkte Lügner.

Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Betrachtung der Antinomie von Grelling und der Richardschen Menge.

## 1. Antinomie des Lügners

Ist die Aussage„Ich lüge." bzw. „Ich bin ein Lügner." eine Lüge? Ist der Satz „Diese Aussage ist falsch." eine falsche Aussage?

.

Angenommen es handelt sich um eine Aussage, dann ist sie entweder wahr oder falsch. Angenommen sie ist wahr, dann besagt sie etwas Wahres und ist somit falsch. Widerspruch. Somit ist sie falsch. Dann trifft aber genau das besagte zu, weshalb sie zwangsläufig wahr ist. Widerspruch. Somit ist sie weder wahr noch falsch und daher keine Aussage. [Dann ist sie aber auch keine falsche Aussage. Somit besagt sie etwas Falsches, ist damit falsch und somit doch eine Aussage. Widerspruch. . . .]

## 2. Antinomie des Wahrsagers

Eine beliebige Person kann niemals ohne fremde Hilfe seine Nichtlügenhaftigkeit beteuern (Münchhausen-Prinzips: Es ist nicht möglich sich selbst am Schopf aus dem Sumpf zu ziehen).

Die Aussage „Ich sage die Wahrheit." bzw. „Ich bin kein Lügner" kann sowohl von einem Wahrsager als auch einem Lügner geäußert werden. Analog kann der Satz „Dieser Satz ist wahr." sowohl wahr als auch falsch sein, ohne dass aus der entsprechenden Annahme ein Widerspruch folgt. Wir können uns somit frei für einen Wahrheitswert entscheiden. Diese Entscheidung ist immer richtig/wahr.

## 3. Antinomie von Grelling

Wir definieren die Eigenschaft heterologisch wie folgt: „Eine beliebige Eigenschaft ist heterologisch, genau dann wenn sie sich selbst nicht bezeichnet, andernfalls ist sie homologisch." So ist unter anderem „einsilbig" heterologisch, da dreisilbig, während „dreisilbig" oder „abstrakt" homologisch sind.

.

Es stellt sich nun die Frage, ob „heterologisch" heterologisch ist. Die Eigenschaft „heterologisch" ist heterologisch genau dann wenn sie sich selbst nicht bezeichnet, also nicht heterologisch ist. Widerspruch.

Analog stellt sich die Frage, ob „homologisch" homologisch ist. „Homologisch" ist homologisch genau dann wenn sie sich selbst bezeichnet, also homologisch ist. Somit können wir uns hier frei entscheiden.

## 4. Richardsche Antinomie / Berrysche Antinomie

Natürliche Zahlen lassen sich in Worten einer beliebigen Sprache eindeutig beschreiben. Solche Beschreibungen nennt man Schriftnamen natürlicher Zahlen. Die Schriftnamen „Zwei“ oder „Gerade Primzahl“ oder „Größter gemeinsamer Teiler von 4 und 6“ bezeichnen offensichtlich eindeutig die natürliche Zahl „2“. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass sowohl Alphabet (nur endlich viele Buchstaben) als auch Sprache zur Formulierung gültiger Schriftnamen eindeutig festgelegt seien und bilden nun die Richardsche Menge $R :=$ „Menge aller mit weniger als 1000 Zeichen beschreibbaren natürlichen Zahlen“. Diese Menge ist offensichtlich existent, endlich und nicht leer. Es ist sogar möglich diese Menge zu konstruieren, indem alle in Frage kommenden Zeichenketten (nur endlich viele) hinsichtlich der Eignung als gültiger Schriftname überprüft werden.

Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, muss es somit auch welche geben, die nicht in der Menge $R$ enthalten sind. Da jede Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt, muss es somit eine kleinste natürliche Zahl geben, die nicht in $R$ enthalten ist. Es gibt also eine kleinste natürliche Zahl deren sämtliche Schriftnamen aus mindestens 1000 Zeichen bestehen. Somit müsste es sich bei $r :=$ „Kleinste natürliche Zahl deren sämtliche Schriftnahmen jeweils aus mindestens 1000 Zeichen bestehen.“ um einen gültigen Schriftnamen handeln. Wenn es sich aber um einen gültigen Schriftnamen handelt, so muss es eine durch diese Beschreibung eindeutig bestimmte natürliche Zahl $n$ geben. Aufgrund dieser Beschreibung gilt $n \notin R$. Da $r$ aber offensichtlich aus weniger als 1000 Zeichen besteht, gilt auch $n \in R$. Widerspruch.

.

Ursache der Antinomie ist die Tatsache, dass uns nicht alle für eine korrekte Betrachtung wesentliche Informationen gegeben sind, wir aber unbewusst versuchen diese Lücken zu füllen. Es ist mit keinem Wort erwähnt, was unter einem gültigen Schriftnamen zu verstehen ist, somit ist dieses Prädikat nicht wohldefiniert und kann nicht zur Mengenbildung herangezogen werden. Wir gehen aber davon aus, dass mit „gültiger Schriftname" alle intuitiv sinnvollen Schriftnamen gemeint sind und bilden uns ein, auf konsistente Weise stets zwischen gültig und ungültig unterscheiden zu können, was aber offensichtlich nicht der Fall ist.

Der richardsche Schriftname stellt aus metamathematischer Sicht (von außen betrachtet) für alle formal definierten Schriftnamen einen gültigen intuitiven Schriftnamen dar. Offensichtlich handelt es sich aber um keinen gültigen intuitiven Schriftnamen, wenn wir die Menge der intuitiven Schriftnamen betrachten. Sobald wir ihn aber aus der Menge der gültigen Schriftnamen entfernt haben, erscheint er uns in gewisser Weise doch korrekt, so dass er wieder aufgenommen werden muss.

Wir ändern den Begriff des „intuitiven Schriftnamens" somit ständig ab und springen zwischen Widersprüchlichkeit und Unvollständigkeit hin und her.

Bei formal definierten Schriftnamen kann dies nicht passieren, die sind immer unvollständig in der Form, dass der richardsche Schriftname als ungültiger Schriftname angesehen oder aber anders interpretiert wird, so dass die zugeordnete natürliche Zahl nichts mit der „kleinsten natürlichen Zahl, in deren sämtlichen Schriftnamen jeweils mindestens 1000 Zeichen vorkommen", zu tun hat.

KAPITEL 6

# Paradoxien der Mathematik

Nun könnte man ja meinen, dass Antinomien nur in der Mengenlehre und der natürlichen Sprache auftreten. Dem ist aber nicht so, denn: Logische Paradoxien verstecken sich auch an vielen Stellen in der Mathematik. Natürlich bedeutet deren Auftreten nicht, dass die Mathematik fehlerhaft bzw. widersprüchlich ist. Die Paradoxien wurde nämlich durch die Axiomatisierung/Formalisierung schon vor ihrer Entdeckung beseitigt und führen nun zu sehr interessanten, überraschenden Erkenntnissen.

Beim Halteproblem für Turingmaschinen und den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen treffen wir auch das zweite Cantorsche Diagonalverfahren wieder, mittlerweile ein gutes Indiz für eine logische Paradoxie. Wenn man sich das zweite Cantorsche Diagonalverfahren als Widerspruchsbeweis vergegenwärtigt (Angenommen es gäbe eine vollständige Paarbildung $\phi \ldots$) wird man feststellen, dass es sich dabei um einen indirekten Repräsentantenbeweis handelt, der wiederum zu den unkonstruktiven Beweisen zählt. Der reine Existenzbeweis ist ebenfalls ein Vertreter unkonstruktiver Beweisverfahren und wird am Ende dieses Kapitels stellvertretend für derartige Beweisverfahren behandelt. Eine vollständige Betrachtung unkonstruktiver Beweisverfahren ist an dieser Stelle verständlicher Weise nicht möglich, da diese ein eigenes Buch füllen würde.

## 1. Berechenbarkeits- bzw. Halteproblem

Das Cantorsche Diagonalverfahren hat uns die Tür zur Unendlichkeit geöffnet. Die wahre Bedeutung des Diagonalverfahrens liegt jedoch darin, das sich dieses Verfahren auch auf andere Theorien übertragen lässt und dort ebenso bedeutungsvolle Resultate hervorbringt. Hier ein Beispiel:

.

Sämtliche heute bekannten Programmiersprachen, egal ob Pascal, C, Java, Assembler, etc. haben ihren Ursprung in dem theoretischen Konzept der Turingmaschinen. Und sämtliche Programmiersprachen sind gleichmächtig, d.h. es lassen sich die gleichen Funktionen berechnen.

Zu jeder berechenbaren Funktion gibt es in der Programmiersprache der Turingmaschinen einen Algorithmus / Quellcode. (Wird definieren hierbei $f(x) := \infty$, falls $f(x)$ nicht terminiert.) Es gibt auch Turingmaschinen bzw. berechenbare Funktionen $c$, die können einen Quellcode auf syntaktische Korrektheit überprüfen und diesen Quellcode interpretieren bzw. simulieren: $c(f,x) := f(x)$. Daraus konstruieren wir eine Funktion $c'$ mit $c'(f) := c(f,f)$. Mithilfe der Funktion $c'(f)$ konstruieren wir nun eine Diagonalfunktion, also eine Funktion, die sich von sämtlichen berechenbaren Funktionen unterscheidet: $d(f) := c'(f) + 1$, falls $c'(f) < \infty$ bzw. $d(f) := 0$, falls $c'(f) = \infty$.

Es gilt $d(d) = c'(d)+1 = c(d,d)+1 = d(d)+1$ falls $c'(d) < \infty$ bzw. $d(d) = 0$ falls $c'(d) = c(d,d) = d(d) = \infty$. Widerspruch. Folglich gibt es zur Funktion $d(f)$ keinen Turingmaschinenalgorithmus, es gibt somit keine Turingmaschine bzw. die Funktion $d(f)$ ist nicht berechenbar:

*Es gibt nicht-berechenbare Funktionen.*

.

Dieses Ergebnis erscheint paradox: Die Funktion $c'(f)$ ist berechenbar, $d(f) = c'(f) + 1$ aber nicht.

Hätten wir jedoch die Funktion $d(f)$ geringfügig anders definiert, nämlich $d(f) := c'(f) + 1$, auch für $c'(f) = \infty$, so wäre $d(f)$ berechenbar, allerdings wäre $d(f)$ dann auch eine völlig andere Funktion. Die Problemstelle ist daher offensichtlich das Terminieren der Berechnung (Halteproblem). Könnte der Algorithmus $d(f)$ erkennen, ob $f(f)$ terminiert, wäre die Funktion $d(f)$ nämlich problemlos berechenbar: Teste ob $f(f)$ terminiert. Wenn ja, dann rechne analog zu $c'(f)$ und addiere zum Schluss eine Eins hinzu. Ansonsten terminiere und gib eine 0 zurück.

Die Funktion $d(f)$ ist eine Diagonalisierung gegen jede berechenbare Funktion und somit nicht berechenbar. Als Ursache der Nicht-Berechenbarkeit haben wir soeben das Halteproblem identifiziert:

*Ein Algorithmus kann niemals*
*seine eigene Terminierung entscheiden.*

.

Wäre eine Turingmaschine eine Blackbox, also eine nicht analysierbare Maschine, die als Eingabe Wörter erhält und diese Eingabe nach endlicher Zeit akzeptiert, nach endlicher Zeit verwirft oder nicht terminiert, so wäre die Unentscheidbarkeit offensichtlich. Schließlich hätten wir nur die Möglichkeit nach Eingabe eines Wortes auf die Ausgabe zu warten. Da ein Entscheidungverfahren irgendwann zu einem Ergebnis gelangen muss, braucht die Blackbox mit der Ausgabe nur lange genug warten. Eine Turingmaschine ist aber keine Blackbox. Ihre Struktur kann vollständig analysiert werden. Da der Code einer Turingmaschine endlich ist, muss das Terminierungsverhalten eine gewisse Struktur aufweisen. Diese Struktur muss nur „geknackt" werden.

Das Problem ist nun aber, dass jedes Entscheidungsverfahren eine gewisse endliche Komplexität besitzen würde, während es beliebig komplexe Instanzen des Halteproblems gibt. Somit gibt es auch Instanzen, die eine höhere Komplexität als das Entscheidungsverfahren besitzen. Diese Instanzen (unter anderem das Entscheidungsverfahren selbst) sind aber für das Entscheidungsverfahren zu kompliziert und können daher nicht vollständig analysiert werden.

Mit Hilfe der heute gängigen Programmiersprachen können wir beliebig komplexe Anwendungen entwickeln und beliebig komplizierte mathematische Funktionen berechnen. Aber: Die interessantesten und wichtigsten Funktionen sind nicht berechenbar bzw. die grundlegendsten Fragen nicht beantwortbar. Oder anders ausgedrückt: Es gibt kein universelles Berechenbarkeitsmodell, denn dieses wäre entweder unvollständig (Terminierung ist nicht entscheidbar) oder widersprüchlich (Entscheidung über die Terminierung kann der Lüge überführt werden).

·

Es ist nun natürlich möglich, sich mächtigere Theorien der Berechenbarkeit auszudenken. Die Theorie der Orakel-Turingmaschinen (Turingmaschine hat die Möglichkeit ein Orakel zu befragen) zeigt, dass so etwas theoretisch möglich ist. Allerdings ist diese Erweiterung lediglich eine theoretische Spielerei und hat keinen praktischen Nutzen, denn konstruieren lässt sich ein solches Orakel nicht. Außerdem treten die entdeckten Phänomene auf einer höheren Ebene wieder auf: Das Halteproblem der

Turingmaschinen ist dann lösbar, das Halteproblem der Orakel-Turingmaschinen aber nicht. ... Es entsteht hierdurch eine unendliche Hierarchie der Berechenbarkeit, wobei sich lediglich die erste Stufe praktisch (algorithmisch) realisieren lässt, sofern genügend Speicherplatz und Rechenzeit zur Verfügung stehen.

## 2. Gödelsche Unvollständigkeitssätze

**Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz.** Zum Beweisen von Aussagen verwenden wir eine mit endlich vielen Axiomen formalisierbare Theorie und eine endliche Menge von Beweisverfahren (z.B. direkter Beweis, Widerspruchsbeweis, vollständige Induktion, ...).

Sei $g$ eine beliebige berechenbare Funktion, so sind wir evtl. mit Hilfe der uns bekannten Beweisverfahren in der Lage die Aussage „$g(x) = 0$“ zu beweisen. Wir konstruieren auf der Grundlage der Theorie der Turingmaschinen und der uns bekannten Beweisverfahren einen Theorembeweiser $p(g, x)$ für die Aussage „$g(x) = 0$“ bzw. $p'(g)$ für die Aussage „$g(g) = 0$“. (Hierbei liefert $p(g, x)$ bzw. $p'(g)$ eine 1 wenn ein Beweis der Aussage gefunden wurde bzw. 0 wenn es sich um eine widerlegbare Aussage handelt.)

Wir diagonalisieren nun gegen jede berechenbare Funktion analog zu $d(f)$, lassen aber diesmal einen Ausweg offen: Es gilt $p'(p') = 1 \rightarrow p'(p') = 0$ oder $p'(p') = 0 \rightarrow p'(p') = 1$ oder $p'(p') = \infty$. Folglich gilt $p'(p') = \infty$ bzw. $p'(p')$ terminiert nicht.

Die Aussage „$p'(p') = 0$“ ist somit durch unseren Theorembeweiser (und somit auch durch uns) weder beweisbar noch widerlegbar. Wenn aber $p'(p')$ nicht terminiert, so ist die Aussage „$p'(p') = 0$“ falsch bzw. $\phi :=$ „$p'(p') <> 0$“ wahr:

*Es gibt in hinreichend ausdrucksstarken widerspruchsfreien Theorien wahre aber nicht beweisbare Aussagen.*

Gödel zeigte diesen ersten und den folgenden zweiten Unvollständigkeitssatz für die elementare Arithmetik (natürliche Zahlen mit Addition und Multiplikation). Zu seiner Zeit gab es weder die Theorie der Turingmaschinen noch ein anderes Berechenbarkeitsmodell und schon gar nicht algorithmisch unentscheidbare Probleme wie das Halteproblem. Ein einfaches Hineinkodieren von Turingmaschinen in die Arithmetik war daher nicht möglich. Gödel war somit gezwungen ein eigenes Berechenbarkeitsmodell auf der Basis der natürlichen Zahlen zu entwickeln und ein Äquivalent zum Halteproblem zu finden.

.

**Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz.** Dieses Ergebnis erscheint paradox: Wir haben eine spezielle Aussage $\phi$ konstruiert, von der wir beweisen können, dass sie wahr ist. Gleichzeitig haben wir damit aber bewiesen, dass sie nicht beweisbar ist und hätten somit den gerade getätigten Beweis gar nicht führen können!?

Die Erklärung: Wir haben während des gesamten Beweises vorausgesetzt, dass sowohl die Theorie der Turingmaschinen als auch unserer Beweisverfahren widerspruchsfrei sind. Somit haben wir lediglich bewiesen: „Ist die Theorie der Turingmaschinen widerspruchsfrei und sind unsere Beweisverfahren korrekt, so ist die Aussage $\phi$ wahr aber nicht beweisbar". Den gleichen Beweis kann auch unser Theorembeweiser $p'(g)$ führen. Während wir die Widerspruchsfreiheit unkorrekterweise einfach unterstellt haben, ist unser Theorembeweiser $p'(g)$ aber auf einen echten Beweis angewiesen. Das wahre Problem ist somit der Beweis der Widerspruchsfreiheit der Theorie der Turingmaschinen in Kombination mit unseren üblichen Beweisverfahren:

*Für hinreichend ausdrucksstarke widerspruchsfreie Theorien ist die Widerspruchsfreiheit nicht beweisbar.*

Im Übrigen hätte ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis keinerlei Aussagekraft, denn in einer widersprüchlichen Theorie lässt sich jede Aussage beweisen, somit auch die der eigenen Widerspruchsfreiheit.

.

Gemäß den beiden Gödelschen Unvollständigkeitssätzen gibt es kein universelles mathematisches Modell in dem sich sämtliche mathematische Fragen beantworten lassen. Denn: Entweder es wäre unvollständig, weil es wahre nicht beweisbare Aussagen enthielte bzw. seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht belegen kann, oder aber es wäre widersprüchlich. Heute gilt die Mengenlehre als Grundlage der Mathematik, das heißt sämtliche Fragen der Mathematik lassen sich auf mengentheoretische Fragestellungen reduzieren. Der Haken: Niemand kann belegen, dass diese Grundlage frei von Widersprüchen ist.

## 3. Reiner Existenzbeweis

**Beweis Irrationalität der Wurzel aus 2.** Angenommen $\sqrt{2}$ ist rational. Da jede positive rationale Zahl ($> 0$) als Bruch zweier natürlicher Zahlen darstellbar ist, gilt für gewisse $a, b \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $a$ und $b$ teilerfremd, der Bruch also nicht kürzbar.

Für jede natürliche Zahl existiert eine eindeutig bestimmte Primzahlzerlegung[4], somit auch für $a$ und $b$. Es gilt

$$\sqrt{2} = \frac{a_1 * a_2 * \ldots * a_k}{b_1 * b_2 * \ldots * b_m}$$

[4]Eine Primzahl $p$ ist eine natürliche Zahl, die nicht als Produkt zweier natürlicher Zahlen ungleich 1 und $p$ darstellbar ist bzw. die nur durch 1 und $p$ ganzzahlig geteilt werden kann. Zum Beispiel gilt $12 = 2 * 2 * 3$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Primzahlen der Größe nach geordnet mit $a_1$ bzw. $b_1$ als kleinste und $a_k$ bzw. $b_m$ als größte Primzahlen.

Wir können die Gleichung nun quadrieren

$$2 = \frac{a_1^2 * a_2^2 * \ldots * a_k^2}{b_1^2 * b_2^2 * \ldots * b_m^2} = \frac{a_1 * a_1 * a_2 * a_2 * \ldots * a_k * a_k}{b_1 * b_1 * b_2 * b_2 * \ldots * b_m * b_m}$$

Anschließend multiplizieren wir die gesamte Gleichung mit

$$b_1 * b_1 * b_2 * b_2 * \ldots * b_m * b_m$$

Es gilt somit

$$2 * b_1 * b_1 * b_2 * b_2 * \ldots = a_1 * a_1 * a_2 * a_2 * \ldots$$

Ein Faktor des linken Produktes ist eine 2, die linke Seite ist also gerade. Somit muss auch die rechte Seite gerade sein, d.h. ein Faktor der rechten Seite muss eine 2 sein. Da die Faktoren nach der Größe geordnet sind, gilt $a_1 = 2$.

Nach Kürzung der 2 erhalten wir:

$$b_1 * b_1 * b_2 * b_2 * \ldots = 2 * a_2 * a_2 * \ldots$$

Ein Faktor des rechten Produktes ist eine 2, die rechte Seite ist also gerade. Somit muss auch die linke Seite gerade sein, d.h. ein Faktor der linken Seite muss eine 2 sein. Da die Faktoren der Größe nach geordnet sind, gilt $b_1 = 2$. Dann sind aber $a$ und $b$, beide enthalten in ihrer Primzahlzerlegung eine 2, gerade und nicht teilerfremd.

Widerspruch. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist somit nicht rational (sondern irrational).

.

**Beweis der Existenz zweier irrationaler Zahlen, deren Potenz rational ist.** Gegeben sei die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$ und $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Wobei $\mathbb{I}$ die

Menge der irrationalen Zahlen und $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen sei. Es stellt sich nun die Frage, ob die Aussage $\exists q, p \in \mathbb{I} : q^p \in \mathbb{Q}$ wahr oder falsch ist.

Angenommen die Aussage ist falsch. Dann gibt es keine zwei irrationalen Zahlen $p$ und $q$, deren Potenz $p^q$ rational ist. Da $\sqrt{2}$ irrational ist muss demzufolge auch $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational sein. Da $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $\sqrt{2}$ irrational sind, muss somit auch $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ irrational sein. $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$ ist aber rational. Widerspruch zur Voraussetzung, dass keine reelle Zahl gleichzeitig rational und irrational sein kann.

Die Aussage $\exists q, p \in \mathbb{I} : q^p \in \mathbb{Q}$ ist somit wahr. Wir haben die Aussage formal bewiesen, ohne jedoch die entsprechenden Zeugen $p$ und $q$ zu identifizieren.

.

Dieses Ergebnis erscheint paradox: Wir haben bewiesen, dass es zwei irrationale Zahlen $p$ und $q$ geben muss, deren Potenz $p^q$ rational ist. Hierbei konnten wir die Menge der möglichen Kandidaten auch gut einschränken, wir haben aber in keiner Weise auch nur den Ansatz eines Hinweises erhalten, welche Kandidaten denn nun tatsächlich zur Lösung führen. Ist so ein unkonstruktiver Beweis dann überhaupt erlaubt/gültig?

Der formale Mathematiker sagt „ja“. Der Konstruktivist bzw. Intuitionist sagt „nein“, verbietet Beweise auf der Grundlage des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten (Eine beliebige Aussage ist stets wahr oder falsch. Etwas Drittes gibt es nicht.) und verlangt einen konstruktiven Beweis, den es ja (auch) geben muss.

.

Der Intuitionismus (auch Konstruktivismus) ist eine Denkrichtung in der mathematischen Logik, die das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten ablehnt. Durch dieses Gesetz werden in der klassischen Logik Widerspruchsbeweise möglich, d.h. man beweist eine Tatsache, indem man ihr Gegenteil widerlegt. Diese Art des Beweises ist nichtkonstruktiv, weshalb er von manchen Mathematikern abgelehnt wird.

Folgender Gedankengang ist erkennbar: Der Widerspruchsbeweis ist (manchmal) unkonstruktiv. Charakteristisches Merkmal dieses Beweisverfahrens ist der Beweis der These durch Widerlegung der Antithese. Diese Beweisführung beruht somit grundlegend auf der Annahme, dass These oder Antithese wahr sein müssen (Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, principium tertium non datur, $\forall a : a \vee \overline{a}$) und niemals These und Antithese gleichzeitig wahr bzw. die Antithese gleichzeitig wahr und falsch sein kann (Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch, principium contradictionis, $\nexists a : a \wedge \overline{a}$). Dies wiederum setzt zwingend die Widerspruchsfreiheit der zugrunde liegenden Theorie voraus, die gemäß dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz nicht sichergestellt werden kann.

Die intuitionistischen Überlegungen sind somit vollkommen nachvollziehbar. Unklar bleibt jedoch:

(1) Gibt es konstruktive Varianten des Widerspruchsbeweises (die hierdurch irrtümlich verboten werden)?

(2) Gibt es andere unkonstruktive Beweisverfahren?

(3) Was ist die echte Ursache der Unkonstruktivität?

Frage 1 beantworten wir durch die folgenden zwei Beweise der These „Es gibt zwei irrationale Zahlen $a$ und $b$, so dass $a * b$ eine rationale Zahl ist.“

Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann gibt es keine zwei irrationalen Zahlen $a$ und $b$, so dass $a * b$ rational ist. Da $\sqrt{2}$ irrational ist muss demzufolge auch $\sqrt{2} * \sqrt{2}$ irrational sein. $\sqrt{2} * \sqrt{2} = 2$ ist aber rational. Widerspruch.

$\sqrt{2}$ ist irrational und $\sqrt{2} * \sqrt{2} = 2$ ist rational. Somit gilt These für $a = b = 2$.

.

Wir sehen also, dass es sehr wohl konstruktive Widerspruchsbeweise geben kann, die sich durch Umkehrung der Beweisführung mittels Kontraposition ($a \to b = \overline{b} \to \overline{a}$) und weiterer Gesetze der Logik in „normale“ direkte Beweise überführen lassen.

Beteiligt an den beiden zuvor geführten Beweisen sind zahlreiche Aussagen, die im Zuge der Beweisführung als Negativzeugen (Widerspruchsbeweis) oder Positivzeugen (Direkter Beweis) auftreten. Überführen wir den Widerspruchsbeweis der These „Es gibt zwei irrationale Zahlen $a$ und $b$, so dass $a*b$ eine rationale Zahl ist.“ in einen direkten Beweis, so treten nun sämtliche Negativzeugen der Antithese als Positivzeugen der These auf.

Wollen wir jedoch den Widerspruchsbeweis der These „Es existieren zwei irrationale Zahlen derart, dass deren Potenz rational ist.“ auf analoge Weise in einen direkten Beweis überführen, so fehlt uns plötzlich ein Zeuge! Nämlich die als ungültig entlarvte Antithese. Diese trat beim Beweis einmal als Antithese und einmal als Negativzeuge in Erscheinung, ist nun verschwunden und lässt somit die gesamte Beweisführung im konstruktiven Sinne zusammenbrechen.[5] Die Antwort auf Frage 3 lautet demnach:

[5] Eigentlich handelt es sich nicht um eine Zeugenvernichtung, sondern um eine Zeugenumwandlung, da die Antithese in die These „umgewandelt“ wird. Bei den Paradoxien der natürlichen Sprache bzw. der Mengenlehre tritt ja gerade das Problem auf, das mit dem Verschwinden des Negativzeugen für die Antithese ein Negativzeuge für die These entsteht.

Die Verwendung von (logisch) abhängigen Zeugen
ist intuitiv äußerst fragwürdig.

Beim konstruktiven Beweis können unabhängige Zeugen benannt werden, so dass eine Begründung der Art „Diese Aussage ist gültig, weil dieses und jenes ebenfalls gültig ist." möglich ist. Diese Begründung ist rein inhaltlich, da die Gültigkeit einer Aussage direkt aus der Gültigkeit anderer Aussagen folgt.

Im Gegensatz dazu ist beim unkonstruktiven Beweis mindestens ein Zeuge (logisch) abhängig. Durch diesen zirkelhaften Selbstbezug ist hier lediglich eine Begründung der Art „Diese Aussage ist gültig, weil es nicht anders sein kann." möglich. Es handelt sich um eine rein logische Begründung die lediglich existentiell aber nicht konstruktiv ist.

.

Wir betrachten abschließend das Beispiel der Russelschen Antinomie. Dabei können wir mit einem unkonstruktiven Widerspruchsbeweis (reiner Nichtexistenzbeweis) zeigen, dass die Russelsche Menge $R$ in sich widersprüchlich ist. Dies geschieht im Wesentlichen durch Angabe einer vermeintlich existenten Menge $M$ für die weder $M \in R$ noch $M \notin R$ gilt. $M$ ist somit der entscheidende Negativzeuge für die Fehlerhaftigkeit von $R$. Da es sich bei $M$ aber um $R$ selbst handelt und $R$ nun als ungültige Menge entlarvt wurde, verschwindet auch dieser Negativzeuge und $R$ erscheint in gewisser Weise nun doch korrekt.

Generell ist erkennbar, dass sämtliche Beweise im Zusammenhang mit logischen Paradoxien unkonstruktive Beweise sind und in der Regel das Beweisverfahren des Widerspruchsbeweises angewendet wird. Antinomien und reine (Nicht-)Existenzbeweise sind somit untrennbar miteinander verbunden.

KAPITEL 7

# Paradoxe Geschichten

Paradoxe Geschichten sind in sich widersprüchliche Beschreibungen, die meistens auf einer logischen Paradoxie beruhen. Die Widersprüchlichkeit ist allerdings gut versteckt und daher in der Regel nicht sofort ersichtlich.

In vielen Fällen sind die Geschichten sehr grob beschrieben und erscheinen nur auf den ersten Blick überraschend-einfach. Bei genauerer Betrachtung erkennen wir viele Ungenauigkeiten, die erst beseitigt werden müssen, damit es sich um eine saubere Antinomie handelt. Dann haben die Geschichten allerdings ihren kompletten Charme eingebüßt.

## 1. Barbier

Es war einmal ein kleines Dorf in dem nur ein einziger Barbier tätig war. Dieser Dorfbarbier rasierte alle Personen dieses Dorfes, die sich nicht selbst rasieren. Da der Barbier selbst eine Person dieses Dorfes ist, stellt sich nun die Frage, ob er sich selbst rasiert oder nicht. Angenommen er rasiert sich selbst, dann wird er somit nicht vom Barbier rasiert und rasiert sich somit nicht selbst. Widerspruch. Wenn er sich aber nicht selbst rasiert, wird er somit vom Barbier rasiert und rasiert sich somit doch selbst. Widerspruch.

.

Bei der Betrachtung dieser kleinen Geschichte vervollständigen wir unbewusst die uns zur Verfügung stehenden Informationen um kleine aber wesentliche Details. Diese Details sind aber für die anschließende Betrachtung entscheidend. Zum Beispiel ist jedem klar, dass der Dorfbarbier nur Personen rasieren würde, die männlich sind, einen Bartwuchs besitzen und keinen Bart tragen wollen. Demzufolge ist die Beschreibung der Tätigkeit des Barbiers fehlerhaft, weil er unter anderem auch Frauen und Kinder rasieren müsste. Dieser Fehler fällt aber in der Regel nicht auf, da wir auf naive Weise davon ausgehen, dass das richtige gemeint war. Viel gravierender ist aber, dass wir intuitiv ausschließen, dass es sich bei dem Dorfbarbier um eine Frau, einen Jungen ohne Bartwuchs oder einen Bartträger handelt.

Besonders entscheidend für den Widerspruch ist die Information, welche Personen vom Barbier rasiert werden. Neben der Tatsache, dass die Personengruppe nicht korrekt angegeben ist, liegt hier ein naiver Logikfehler vor. Wir erhalten lediglich die Information, dass der Barbier unter anderem Personen dieser Personengruppe rasiert. Es könnte aber noch andere Personen geben. Eine Formulierung der Art „... und er rasiert keine anderen Personen.“ ist nicht gegeben und kann nicht grundlos angenommen werden.

Es gibt aber noch einen weiteren naiven Fehler, ein Typfehler. Der Barbier ist auch eine Person des Dorfes, aber nicht jede Person des Dorfes ist ein Barbier. Ein Barbier ist somit ein anderer Typ als eine Person. Ein Barbier kann eine Person rasieren [rasieren($B$: Barbier, $P$: Person): Boolean] und eine Person kann eine Person (i.R. sich selbst) rasieren [rasieren($P_1$: Person, $P_2$: Person): Boolean]. Es handelt sich dabei um zwei vollkommen verschiedene Prädikate, der Barbier kann als einzige Person beides tun. Die Frage muss also lauten, ob sich der Barbier zur Arbeitszeit (also als Barbier) oder in der Freizeit (als Person) rasiert. Diese Unterscheidung ist für die Bezahlung des Barbiers entscheidend und für das Finanzamt sehr wichtig, schließlich ist die Rasur nur in der Freizeit kostenlos bzw. steuerfrei.

Dieses Beispiel ist eine literarische Auswertung der Antinomie des Lügners „Der Barbier rasiert sich selbst.“. Ob sich der Barbier nun selbst rasiert oder nicht, kann aufgrund der uns gegebenen Informationen nicht entschieden werden, da eine naive Vervollständigung der Informationen nicht erlaubt ist. Falls die Geschichte entsprechend korrigiert wird, hat sie aber ihre gesamte Natürlichkeit verloren und ist somit als Beispiel für eine Antinomie wertlos. Die Folgerung aus der korrigierten Version ist dann, dass ein solches Dorf bzw. ein solcher Barbier aufgrund der inkonsistenten Beschreibung nicht existieren kann.

## 2. Selbstmörder

Ein anderes Dorf plant einen kollektiven Suizid. Um sicherzustellen, dass sich niemand dem Vorhaben entzieht, bekommt ein Bewohner des Dorfes den Auftrag, alle Bewohner des Dorfes zu töten, die sich nicht selbst töten. Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Dorfmitglied sich selbst tötet oder nicht. Egal ob er sich tötet oder nicht, er verstößt auf jeden Fall gegen die Anordnung.

.

Diese Geschichte ist analog zum Barbier. Somit können hier exakt die gleichen Kritikpunkte aufgeführt werden.

## 3. Galgen

Ein wasserreicher Fluss trennte die zwei Hälften einer und derselben Herrschaft. Über diesen Fluss führte eine Brücke und am Ende dieser stand ein Galgen und eine Art Gerichtshaus, indem für gewöhnlich vier Richter ihren Sitz hatten und Recht sprachen nach dem Gesetz, das der Herr des Flusses, der Brücke und der Herrschaft gegeben hat. Dieses Gesetz besagte, dass jeder die Brücke Überquerende eidlich erklären solle wohin und zu welchen Zweck er dahin geht. Wenn er die Wahrheit sagt, so sollen sie ihn hinüber lassen und wenn er lügt, so soll er dafür an dem Galgen hängen und sterben. Die Richter seien dabei fähig eindeutig zwischen Lüge und Wahrheit zu unterscheiden. Nun geschah es einmal, dass ein Mann bei der Eidesleistung erklärte, er gehe hinüber, um an dem Galgen dort zu sterben und zu keinem anderen Zweck. Wird er gehängt, so hat er wahr gesprochen und durfte gar nicht gehängt werden. Wird er aber nicht gehängt, so hat er gelogen und hätte gehängt werden müssen. Widerspruch.

.

Diese Geschichte stammt aus dem Roman „Don Quijote“ von Cervantes (1547-1616). Zur Vereinfachung fordern wir jetzt nur noch, dass eine beliebige Aussage getätigt wird. In diesem Fall kann sogar die Wahrsager-Antinomie in der Form „Ich werde nicht gehängt.“ auftreten.

Auch hier finden wir wieder einige naive Vervollständigungen der zur Verfügung stehenden Informationen. Es wurde uns zwar mitgeteilt, dass Galgen und Gerichtshaus am Ende der Brücke stehen, aber nicht an welchem Ende. Somit ist es möglich, dass sich der Mann auf der Seite des Galgens befindet. In diesem Fall kann er am Galgen sterben, ohne die Brücke überqueren zu müssen.

Wir finden auch hier wieder einen Logikfehler. Das Gesetz besagt nämlich lediglich, dass eine lügende Person am Galgen hängen soll. Dass eine Person auch aus anderen Gründen am Galgen hängen darf oder aber eine die Wahrheit sagende Person unter keinen Umständen am Galgen hängen darf, wurde nirgendwo ausgeschlossen bzw. festgelegt. Somit ist die Aussage „Ich werde hängen.“ die Wahrheit.

Aufgrund der Zirkelhaftigkeit des Satzes „Ich werde hängen.“, handelt es sich um keine semantisch wohlgeformte Aussage, da sie weder wahr noch falsch sein kann. Eine Bewertung bezüglich Wahrheit oder Lüge ist somit nicht möglich. Wie in einem solchem Fall zu verfahren ist, wurde durch das Gesetz nicht geregelt (Gesetzeslücke). Zum Beispiel könnte ja verfügt werden, dass der Mann nicht hinüber gelassen aber auch nicht gehängt werden darf.

Auch der Eindruck, dass das Gesetz in den meisten Fällen gut funktioniert, ist nicht korrekt. Die Richter können nämlich nach belieben eine Person hängen. Da diese Person ihr Vorhaben auf der anderen Seite nicht mehr in die Tat umsetzen kann, hat sie offensichtlich gelogen.

Dieses Beispiel ist eine literarische Auswertung der Antinomie des Lügners „Ich werde hängen.“. Falls die Geschichte entsprechend der Kritikpunkte korrigiert wird, hat sie ihre gesamte Natürlichkeit verloren und ist somit als Beispiel wertlos.

## 4. Gewinnmaximierung

Ein Mann ist als Sieger eines Wettbewerbes hervorgegangen. Er hat nun die Möglichkeit keinen, einen oder zwei Preise zu erhalten. Dazu muss er lediglich eine beliebige Aussage treffen. Wenn diese falsch ist, so bekommt er keinen Preis. Wenn sie wahr ist, so bekommt er einen oder beide Preise. Dieser Mann liefert als Antwort folgenden Satz „Ich bekomme entweder keinen oder beide Preise.“. Angenommen er bekommt keinen Preis, dann muss die Aussage falsch sein, ist aber offensichtlich wahr. Widerspruch. Angenommen er bekommt einen Preis, dann muss die Aussage wahr sein, ist aber offensichtlich falsch. Widerspruch. Somit bekommt er beide Preise, dann muss die Aussage wahr sein, was offensichtlich auch stimmt.

.

Die Tatsache, dass die Jury zur Herausgabe beider Preise gezwungen werden kann, ist schon etwas überraschend. Bei genauerer Betrachtung erkennen wir aber auch hier wieder die bereits bekannten naiven Fehler.

Wenn wir davon ausgehen, dass die Jury sich bereits vor der Antwort entschieden hätte, dass im Falle einer wahren Aussage nur ein Preis ausgehändigt wird, so handelt es sich offensichtlich um keine semantisch wohlgeformte Aussage. Dieser Fall „Keine Aussage als Antwort“ wurde durch die Wettbewerbsregeln nicht berücksichtigt. Somit ist eine Entscheidung über die Anzahl der herauszugebenden Preise nicht möglich.

Für den Fall, dass die Jury die Anzahl der Preise erst nach Bekanntgabe der Antwort festlegt, liegt es in ihrer Hand, ob es sich um eine wahre Aussage oder um keine Aussage handelt. Damit eine Herausgabe beider Preise erzwungen werden kann, benötigen wir eine Wettbewerbsregel, der Form „Die Antwort ist wahrheitsfähig, immer wenn möglich.“, die von der Jury berücksichtigt werden muss. Eine solche Regel ist aber nicht gegeben.

Dieses Beispiel ist eine literarische Auswertung der Antinomie des kontingenten Lügners (Die Antwort ist unter kontingenten Bedingungen widersprüchlich).

## 5. Unerwartete Überraschung

Ein Lehrer teilt seinen Schülern mit, dass an irgend einem Tag der nächsten Woche ein Test geschrieben wird, der Zeitpunkt dieses Tests aber vollkommen überraschend sein werde. Die Schüler überlegen nun, dass der Test nicht auf den Freitag fallen kann, denn am Freitagmorgen würden sie wissen, dass er an diesem Tag stattfinden muss, da sie wissen, dass er nicht von Montag bis Donnerstag stattgefunden hat, und dann wäre er keine Überraschung. Er kann aber auch nicht am Donnerstag stattfinden, denn am Donnerstagmorgen würden sie wissen, dass er an diesem Tag stattfinden muss, da sie wissen, dass er nicht von Montag bis Mittwoch stattgefunden hat und am Freitag nicht stattfinden kann. Mit dem gleichen Argument kann auch der Mittwoch, Dienstag und Montag ausgeschlossen werden. Also, so überlegen sie, kann der Test nicht stattfinden und eine Überraschung sein. Wenn die Prüfung dann beispielsweise am Donnerstag stattfindet, ist sie eine große Überraschung.

.

Offensichtlich liegt hier eine zirkelhafte Beschreibung des Prüfungszeitpunktes vor. Diese Beschreibung ist inkonsistent und damit wertlos. Bereits in dem Moment, wo geschlussfolgert wurde, dass der Test nicht stattfinden kann, hätte man die Inkonsistenz erkennen und eine weitere Betrachtung ausschließen müssen, da inkonsistenten Informationen stets paradoxe Folgerungen nach sich ziehen. Die Inkonsistenz besteht darin, dass auf der einen Seite definitiv eine Prüfung für die nächste Woche angekündigt wird, auf der anderen Seite aber alle möglichen Prüfungstermine ausgeschlossen werden.

Da die Aussage „Der Test findet am Donnerstag statt.“ aufgrund der uns gegebenen Informationen weder wahr noch falsch sein kann, handelt es sich um eine semantisch misslungene Aussage und somit um eine literarische Auswertung der Antinomie des Lügners.

KAPITEL 8

# Analysen

## 1. Isomorphismen und Analogien

Antinomien sind ein ernstzunehmendes Phänomen und müssen daher identifiziert und beseitigt werden. Unter anderem haben wir Antinomien in der natürlichen Sprache entdeckt. In allen zur natürlichen Sprache (universelle Theorie der Aussagen) isomorphen Theorien treten zwangsläufig ebenfalls Antinomien auf. Wir wollen nun einige zur natürlichen Sprache isomorphen Theorien kennen lernen:

·

Offensichtlich ist die universelle Theorie der Eigenschaften in der universellen Theorie der Aussagen enthalten, da zu jeder Eigenschaft $E$ und jedem Objekt $o$ die Aussage „Das Objekt $o$ besitzt die Eigenschaft $E$." gebildet werden kann. Andererseits ist die Theorie der Aussagen in der Theorie der Eigenschaften enthalten, da Aussagen (spezielle Objekte) mit Hilfe der Eigenschaften „Aussage sein", „wahr sein" und „falsch sein" bewertet werden. Somit sind aber beide Theorien zueinander isomorph.

Offensichtlich ist die universelle Theorie der Eigenschaften in der universelle Theorie der Mengen enthalten, da zu jeder Eigenschaft $E$ die „Menge aller Objekte mit der Eigenschaft $E$." gebildet werden kann. Andererseits ist die Theorie der Mengen in der Theorie der Eigenschaften enthalten, da Mengen spezielle Objekten darstellen und mit Hilfe der Eigenschaft „Element sein" bewertet werden können. Somit sind auch diese beide Theorien zueinander isomorph.

Offensichtlich ist die Theorie der intuitiven Schriftnamen natürlicher Zahlen in der universellen Theorie der Aussagen enthalten, da zu jedem Schriftnamen $S$ und jeder natürlichen Zahl $n$ die Aussage „Die natürliche Zahl $n$ besitzt den Schriftnamen $S$." gebildet werden kann. Andererseits ist die Theorie der Aussagen in der Theorie der Schriftnamen enthalten, da der Wahrheitswert einer Aussage als 0 oder 1 interpretiert und somit eine Aussage als Schriftname für eine der beiden natürlichen Zahlen verwendet werden kann. Somit sind auch diese beide Theorien zueinander isomorph.

Analoge Betrachtungen sind für universelle Funktionstheorien, Berechenbarkeitsmodelle bzw. Beweisbarkeitskalküle möglich.

Alle diese Theorien sind also in ihrer naiven, universellen bzw. intuitiven Form zueinander isomorph. Wenn in einer dieser Theorien eine Antinomie auftritt, so tritt sie auch in allen isomorphen Theorien auf.

.

Die Paradoxie von Grelling ist „lediglich" die Übertragung der Paradoxie des Lügners (heterologisch) und des Wahrsagers (homologisch) in eine universelle Funktionstheorie. Analog sind die Russelschen Mengen $R_1 = \{M : M \notin M\}$ und $R_2 = \{M : M \in M\}$ entsprechende Übertragungen in die Mengenlehre.

Der richardsche Schriftname $r :=$ „Kleinste natürliche Zahl deren sämtliche Schriftnahmen jeweils aus mindestens 1000 Zeichen bestehen." ist eine Form der Lügner-Antinomie. Dann ist aber auch der Wahrsager nicht weit: Dem Schriftnamen $r' =$ „Größte natürliche Zahl, die mindestens einen Schriftnamen mit weniger als 1000 Zeichen besitzt." können wir eine beliebige natürliche Zahl zuordnen.

Selbst bei Turingmaschinen finden wir den Lügner und den Wahrsager wieder: Es gibt keine Turingmaschine, die terminiert, wenn es sich bei der Eingabe um eine Turingmaschine handelt, die mit sich selbst als Eingabe nicht terminiert. Es gibt aber sehr wohl eine Turingmaschine $T$, die terminiert, wenn es sich bei der Eingabe um eine Turingmaschine handelt, die mit sich selbst als Eingabe terminiert. Diese Turingmaschine prüft die Eingabe auf syntaktische Korrektheit und simuliert einfach diese Turingmaschine mit sich selbst als Eingabe. Für die so konstruierte Turingmaschine gilt, dass sie mit sich selbst als Eingabe aufgrund der Simulation in der Simulation in der Simulation ... nicht terminiert. Vollkommen offen bleibt jedoch, ob es ggf. einen alternativen Algorithmus $T'$ für die gleiche Sprache gibt, so dass $T'$ mit sich selbst als Eingabe terminiert.

## 2. Paradoxe Strukturen und Varianten

Wir haben bereits einige Antinomien kennen gelernt und erfahren in welchen Theorien ebenfalls Antinomien auftreten. Wir wollen nun verschiedene Formen von Antinomien oder antinomieähnlichen Gebilden kennen lernen um ein besseres Verständnis für die Problematik zu erhalten. Als Antinomie werden dabei hauptsächlich der bösartige bzw. der kontingente bösartige Zirkel angesehen, obwohl diese Einschränkung dem Phänomen nicht gerecht wird.

**Die unvollständige Definition.** Eine Eigenschaft ist in der Regel nur für bestimmte Objekte definiert. Daher gibt es im Allgemeinen immer Objekte außerhalb dieses Definitionsbereiches für die eine Bewertung bezüglich dieser Eigenschaft nicht möglich ist, für die die Eigenschaft also nicht definiert ist. Eigenschaften, die überhaupt nicht definiert sind, stellen dabei lediglich einen Spezialfall dar. Da es sich hierbei lediglich um unvollständige Definitionen handelt, ist eine Korrektur durch entsprechende Erweiterungen der Definitionen problemlos möglich.

Beispiele: „Die natürliche Zahl 7 ist gelb.“ „Menge aller gelben natürlichen Zahlen.“

**Die widersprüchliche Definition.** Eigenschaften werden oft auf verschiedene Art und Weise definiert. Außerdem ist es möglich, dass eine Definition rekursiv erfolgt oder aus mehreren Teildefinitionen besteht, die sich ggf. überlappen (unsaubere Fallunterscheidung). Dabei kann es passieren, dass sich verschiedene Definitionen widersprechen und die Eigenschaft somit widersprüchlich definiert ist. Eine solche Eigenschaft zieht stets widersprüchliche Folgerungen nach sich.

Beispiel: $a(n) := -1$, wenn $n \leq 0$ und $a(n) := +1$, wenn $n \geq 0$.

**Der gutartige Zirkel.** Eine gefährlichere Form der Definition ist der gutartige bzw. positive Zirkel (Wahrsager). In diesem Fall existiert eine zirkelhafte Abhängigkeit in der Definition, die Unvollständigkeiten zur Folge haben kann. Die zirkelhafte Referenzierung kann dabei sowohl statisch als auch dynamisch sein. Außerdem kann sie direkt (Wahrsager) oder indirekt (Wahrsager-Zirkel) auftreten.

Im Gegensatz zum Abschnitt „Die unvollständige Definition“ ist eine Definition vorhanden aber aufgrund des Zirkels nicht wohldefiniert. Solche Definitionen sind lediglich unvollständig und können entsprechend korrigiert werden.

Beispiele: „Menge aller Elemente dieser Menge.“ „Menge aller sich selbst enthaltenden Mengen.“ „Der folgende Satz ist wahr.“ „Der vorangehende Satz ist wahr.“

**Der bösartige Zirkel.** Eine ähnliche Form der Definition ist der bösartige bzw. negative Zirkel (Lügner). In diesem Fall existiert eine zirkelhafte Abhängigkeit in der Definition, die Widersprüchlichkeiten zur Folge hat. Die zirkelhafte Referenzierung kann dabei analog zum Wahrsager sowohl statisch als auch dynamisch sein. Außerdem kann sie direkt (Lügner) oder indirekt (Lügner-Zirkel) auftreten.

Diese Zerstörung der Wohldefiniertheit wird meistens übersehen, da eine anscheinend korrekte Definition existiert. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt ist eine Korrektur durch Erweiterung aber nicht möglich.

Beispiele: „Menge aller nicht in dieser Menge enthaltenen natürlichen Zahlen.“ „Menge aller sich nicht selbst enthaltenen Mengen.“ „Diese Aussage ist falsch.“

**Der kontingente Zirkel.** Eine weitere Form der Abhängigkeit ist ein kontingenter Zirkel. In diesem Fall existiert eine zirkelhafte Abhängigkeit, die sich nur unter bestimmten (kontingenten) Bedingungen als gutartiger oder bösartiger Zirkel bemerkbar macht. Solange sichergestellt werden kann, dass diese Bedingungen niemals eintreten, spielt der Zirkel keine wesentliche Rolle und kann „wegoptimiert“ werden.

Beispiele für kontingente bösartige Zirkel: „Ich bin ein notorischer Lügner.“ „Menge aller nicht in dieser Menge enthaltenen Elemente der Menge $A$.“ ($A$ sei eine beliebige Teilmenge der natürlichen Zahlen.)

Eine spezielle Form der Kontingenz ist die Standortabhängigkeit: Zwei Personen Fritz und Max mit exakt gleichem Wissen über die Welt und gleichen Fähigkeiten unterhalten sich. Dabei stellt Fritz folgende Frage: „Wirst du diese Frage ohne zu lügen mit ‚nein‘ beantworten?“. Wenn Max, an den die Frage gerichtet war, mit „ja“ antwortet, so behauptet er, dass er mit „nein“ antwortet und hat somit gelogen. Also „nein“. Wäre diese Antwort keine Lüge, so würden er ohne zu lügen mit „nein“ antworten. Es würde also genau das Gefragte eintreten und er müssten (weil er ja nicht lügt) mit „ja“ antworten. Somit kann er die Frage nicht beantworten oder er würde dabei lügen. Fritz ist sich dieser Tatsache bewusst und kennt daher die korrekte Antwort, nämlich „nein“. Obwohl beide Personen sich geistig nicht unterscheiden und somit exakt das gleiche Wissen über die Welt besitzen und somit eigentlich alle Fragen gleich beantworten müssten, unterscheiden sich in diesem Fall ihre Antworten oder aber die eine lügt und die andere spricht die Wahrheit. Es existiert jedoch ein entscheidender Unterschied: Der Standort.

Die Frage „Lautet die Antwort auf diese Frage ‚nein‘?“ kann dann allerdings wieder keiner von beiden beantworten ohne dabei zu lügen.

**Der wohldefinierte Zirkel.** Das Zirkel nicht immer als gutartiger oder bösartiger Zirkel auftreten, zeigt der wohldefinierte Zirkel. In diesem Fall existiert eine zirkelhafte Abhängigkeit, die aber vollständig „wegoptimiert“ werden kann. Im Gegensatz zum kontingenten Zirkel ist nicht einmal eine Teilauswertung des betreffenden logischen Ausdrucks nötig. Grundlage dieser Optimierung ist der Satz vom ausgeschlossenen Dritten oder der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch.

Ob es sich bei einem Zirkel um einen wohldefinierten Zirkel handelt, ist von der Art der Auswertung (full evaluation - lazy evaluation), von den verwendeten Optimierungsregeln bzw. allgemein von der Art der Interpretation abhängig. Gleiches gilt auch für den kontingenten Zirkel.

Beispiele: „Ich lüge und sage gleichzeitig die Wahrheit.“ „Menge aller in dieser Menge enthaltenen oder nicht enthaltenen natürlichen Zahlen.“

**Der unendlicher Regress.** Eine vollkommen andere Form der Abhängigkeit ist der unendliche Regress. Es handelt sich hier um keinen Zirkel. Dennoch sind solche Definitionen ebenfalls nicht wohldefiniert und haben sehr große Ähnlichkeit mit dem gutartigen Zirkel.

Beispiel: $A_n =$ „Der Satz $A_{n+1}$ ist wahr.“ (Es handelt sich hier um ein Aussageschema, das für unendlich viele Aussagen steht. Die Aussage $A_1$ bezieht sich dabei auf $A_2$ und diese wiederum auf $A_3, \ldots$

## 3. Arten der Referenzierung

Wir haben bereits die beiden Sätze „Dieser Satz besteht aus sieben Wörtern.“ und „Dieser Satz besteht nicht aus sieben Wörtern.“ kennen gelernt. Dabei haben wir erfahren, dass beide Sätze eindeutig falsch sind und somit nicht die Negation des jeweiligen anderen sein können. Wir wollen nun das Problem der Negation in Abhängigkeit von der Art der Referenz genauer untersuchen.

Gegeben sei der Satz „Dieser Satz ist falsch.“. Offensichtlich liegt hier eine Selbstreferenzierung mittels „Dieser Satz“ vor. Dabei handelt es sich um eine relative Referenz. Durch geringfügige Änderungen an diesem Satz (zum Beispiel Negation) ändert sich auch diese Referenz. Für eine gültige Negation darf das aber gerade nicht passieren.

**Einbettung.** Der Satz $A =$ „Dieser Satz ist falsch.“ ist logisch äquivalent zu $B =$ „Der Satz ‚Dieser Satz ist falsch.‘ ist falsch.“ (Auflösung der Referenz). Daher muss die Negation von $A$ auch logisch äquivalent zur Negation von $B$ sein. Die Negation von $B$ lautet $\overline{B} =$ „Der Satz ‚Dieser Satz ist falsch.‘ ist wahr.“ und ist offensichtlich ebenfalls logisch äquivalent zu $A$ (Übernahme des Wahrheitswertes). Dann ist aber $A$ seine eigene Negation und offensichtlich verschieden von $C =$ „Dieser Satz ist wahr.“. Somit kann der Wahrsager in diesem Fall nicht die Negation des Lügners sein.

Wir haben hier die Auflösung der Referenz durch Einbettung von Aussagen kennen gelernt und ganz nebenbei bewiesen, dass der Wahrsager in diesem Fall nicht die Negation des Lügners sein kann. Das Einbetten kann als spezielle Form des Referenzierens betrachtet werden, es handelt sich dabei um eine Referenzierung über den Inhalt im Gegensatz zur Referenzierung über einen (abstrakten) Bezeichner. Ein Nachteil der Einbettung ist die Unmöglichkeit zur Erzeugung selbstbezüglicher Sätze.

**Quinierung.** Wir definieren einen Stringoperator: Quine(S) ist eine Funktion die als Eingabe eine Zeichenkette erhält, das erste Vorkommen von „%" durch das Zitat der Eingabe ersetzt und das Ergebnis dieser Ersetzung zurückgibt. Es handelt sich dabei um eine Abwandlung des Quinierens[6], das einer Zeichenkette das Zitat seiner selbst voranstellt. Der Satz „Der Satz Quine(‚Der Satz Quine(%) ist falsch.') ist falsch." stellt mit Hilfe dieses Satzkonstruktions-Operators einen selbstbezüglichen Satz dar. Die Negation dieses Satzes lautet dann „Der Satz Quine(‚Der Satz Quine(%) ist falsch.') ist wahr.". Es handelt sich bei (dieser Form) der Quinierung um eine Erweiterung der Einbettung, die nun auch Selbstbezüglichkeiten möglich macht.

**Nutzung vorhandener Namensräume.** Jede Referenz ist eine relative Referenz und kann lediglich innerhalb eines bestimmten Namensraumes als absolut angesehen werden. Referenzen wie „Der vorherige Satz", „Alle Wörter des nächsten Kapitels", „Der erste Satz auf der nächsten Seite", „Das letzte Wort dieses Dokumentes" oder „Das wichtigste Buch dieses Planeten" zeigen, dass unter anderem jeder Satz, jedes Kapitel, jede Seite, jedes Dokument und jeder Planet einen eigenen Namensraum besitzen. Die Namensräume bilden eine Halbordnung, so dass die Bezeichner der Namensräume zur Referenzierung benutzt werden können („Das vierte Wort des dritten Absatzes auf der zweiten Seite des ersten Kapitels dieses Dokumentes").

[6] „ergibt eine Unwahrheit, wenn sein Zitat voran geht" ergibt eine Unwahrheit, wenn sein Zitat vorangeht.

Wenn eine Aussage negiert werden soll, muss ein gemeinsamer Namensraum für die Aussage und ihre Negation gefunden und die Referenz durch den entsprechenden (eindeutigen) Bezeichner aus diesem Namensraum ersetzt werden.

**Definition eigener Namen.** Die einfachste Möglichkeit eine Aussage negationsfähig zu machen ist die Einführung eindeutiger Bezeichnungen für jeden Satz und die Ersetzung der relativen Referenz durch die entsprechende absolute Referenz. Die Negation von $A =$ „Der Satz A ist falsch." lautet dann $B =$ „Der Satz A ist wahr.". Dabei müssen die Bezeichner nicht global eindeutig sein. Es reicht vollkommen aus, wenn sich die Bezeichner des Satzes und der Negation im gleichen Namensraum befinden. In der Regel ist der Gültigkeitsbereich dieses Namensraumes aus dem Kontext ersichtlich.

**Konvertierung relativer Bezeichner.** Eine einfache und effektive Möglichkeit zur Negation von Aussagen ist die Konvertierung der Bezeichner um die Änderung der Referenz durch Wechsel des Namensraumes zu korrigieren. Das hat den Vorteil, dass ein gemeinsamer Namensraum nicht benötigt wird. Ein Beispiel für diese Lösung sind folgende beide Sätze: „Dieser Satz ist falsch.", „Der vorherige Satz ist wahr.".

## 4. Wahrsager, Lügner und deren Negationen

Bei der Antinomie der natürlichen Sprache untersuchen wir meistens nur den Lügner, obwohl es sich bei dem Wahrsager ebenfalls um eine antinomieähnliche Konstruktion handelt. Hier tritt zwar kein Widerspruch auf, dafür können wir uns hier aber willkürlich für einen Wahrheitswert entscheiden, was auch sehr ungewöhnlich ist und nichts mit Aussagen zu tun hat, bei denen eine Bewertungsgrundlage fehlt (z.B. „Alle natürlichen Zahlen sind gelb.").

Wenn wir allerdings noch genauer hinsehen, erkennen wir einen gewissen Zusammenhang zwischen dem Lügner und dem Wahrsager. Somit sind z.B. die vier Sätze $S_1$ := „Der Satz $S_1$ ist falsch.“, $S_2$ := „Der Satz $S_1$ ist wahr.“, $S_3$ := „Der Satz $S_3$ ist wahr.“ Und $S_4$ := „Der Satz $S_3$ ist falsch.“ untrennbar miteinander verbunden aber grundsätzlich verschieden. Der Satz $S_1$ ist dabei der Lügner, der Satz $S_2$ seine Negation (ebenfalls ein Lügner). Analog ist Satz $S_3$ der Wahrsager und $S_4$ seine Negation (ebenfalls ein Wahrsager). Man wird sehr schnell einsehen, dass es somit eine Art Gleichgewicht zwischen diesen Aussagen gibt. Ist eine Aussage „normal“, so ist seine Negation ebenfalls normal. Ist dagegen eine Aussage unnormal, so ist unter anderem seine Negation ebenfalls unnormal.

Im vorangehenden Abschnitt haben wir erkannt, dass der Lügner seine eigene Negation repräsentiert. Dabei war der Lügner und somit auch seine Negation verschieden vom Wahrsager. Das ist aber nicht immer so, denn es gibt Antinomien, bei denen die Negation des Lügners sehr wohl der Wahrsager sein kann. Als Beispiel sei hier der Satz $S_1$ := „Alles was ich jemals gesagt habe oder sagen werde ist gelogen.“ bzw. $S_2$ := „Manchmal sage ich die Wahrheit.“ genannt. Der Satz $S_2$ repräsentiert einen kontingenten Wahrsager und gleichzeitig die Negation des kontingenten Lügners $S_1$. Für die Sätze $S_3$ := „Ich sage stets die Wahrheit.“ bzw. $S_4$ := „Manchmal lüge ich.“ gilt entsprechendes.

Außerdem gibt es Antinomien, bei denen fällt der Lügner mit der Negation des Lügners, dem Wahrsager und der Negation des Wahrsagers zusammen. Als Beispiel sei hier die Russelsche Antinomie $R_1 = \{M : M \in M\}$ bzw. $R_2 = \{M : M \notin M\}$ genannt. $R_1$ ist bezüglich $R_1$ ein Wahrsager und bezüglich $R_2$ ein Lügner. Außerdem ist $R_2$ bezüglich $R_2$ ein Lügner und bezüglich $R_1$ ein Wahrsager. $R_1$ ist die Negation von $R_2$ und somit die Negation eines Lügners bzw. eines Wahrsagers. $R_2$

ist die Negation von $R_1$ und somit ebenfalls die Negation eines Lügners bzw. eines Wahrsagers.

In der Regel werden wir den Wahrsager behalten und den Lügner verbieten wollen. Es muss aber klar sein, dass das nicht ohne weiteres möglich ist, weil sich beide Aussagen sehr ähnlich sind und eng miteinander verbunden sind. Beim Entdecken des Wahrsagers ist demnach der Lügner stets nicht weit.

KAPITEL 9

# Lösungen

## 1. Verbot zirkelhafter Selbstbezüglichkeit

Ursache logischer Paradoxien sind zirkelhafte Selbstbezüglichkeiten. Die einfachste Form der Lösung von Antinomien ist somit der Verbot bzw. die Einschränkung zirkelhafter Selbstbezüge. Dieses Verbot kann entweder syntaktisch (Selbstbezüge werden generell verboten) oder rein semantisch (fehlerhafte Objekte werden nachträglich verworfen) durchgesetzt werden.

.

Für Aussagen der natürlichen Sprache gibt es die Möglichkeit die Referenzierungen der Aussagen untereinander so einzuschränken, dass Zirkel nicht mehr auftreten können. Allerdings ist die natürliche Sprache so unstrukturiert, dass eine solche Einschränkung einen extremen Verlust an Ausdrucksfähigkeit zur Folge hätte (z.B. Prädikatenlogik). Somit scheint eine Einschränkung in der Form von Konstruktionsregeln nicht möglich, sondern lediglich eine nachträgliche Verwerfung ungültiger Aussagen, wobei eine Interpretationsregel der Form „Eine Aussage ist wahrheitsfähig immer wenn möglich.“ als sehr kritisch zu bewerten ist. Versuche in diese Richtung wurden von Russel (Stufen- und Typentheorie), Kripke (Stufenweise Anwendung des Wahrheitsprädikates), Chrysipp (cassatio-Lösung) und Robert Martin unternommen.

Die axiomatische Mengenlehre (ZFC) bzw. die Russelsche Typen- und Stufentheorie gehen einen analogen Weg. Es wird die Mengenbildung syntaktisch soweit eingeschränkt, dass Zirkel nicht mehr auftreten können. Dass dabei auch einige nützliche Mengen verloren gehen, wird stillschweigend in Kauf genommen.

Bei der Definition von Eigenschaften sind Zirkel prinzipiell verboten und werden als misslungen angesehen. Die Zirkelfreiheit wird erreicht, indem die Referenzierungen auf (andere) Eigenschaften bei der Definition eingeschränkt werden. Diese Einschränkung wird durch zwei grundlegende Konventionen erreicht: Die erste Regel besagt, dass bei der Definition möglichst nur auf Eigenschaften Bezug genommen werden darf, die bereits vorher definiert wurden und somit vollkommen unabhängig von der gerade zu definierenden Eigenschaft sind. Die zweite fordert, dass ein Selbstbezug bezüglich einer Eigenschaft nur induktiver (rekursiver) Art sein darf. Beide Regeln werden implizit eingehalten, indem nur Bezug auf Definitionen der Vergangenheit (bereits getätigte Definitionen) genommen wird.

## 2. Semantisches Spezialergebnis

Im Gegensatz zur vorherigen Lösung besteht auch die Möglichkeit die Syntax vollständig beizubehalten und statt dessen die Semantik entsprechend zu korrigieren. Der (intuitive) Interpretationsalgorithmus ist nun in der Lage unter bestimmten Umständen ein Spezialergebnis zurückzugeben und somit wohldefiniert zu terminieren. Entscheidend dabei ist, dass es sich dabei tatsächlich um ein Spezialergebnis handelt, das den anderen Ergebnissen durch eingeschränkte Abfragbarkeit nicht gleichgestellt ist und dessen Anwendung durch eine übergeordnete Regel geregelt wird. Wird die Abfragbarkeit des Spezialergebnisses nicht eingeschränkt, so tritt die Antinomie in Form des verstärkten Lügners (siehe weiter unten) erneut auf und erzwingt die Existenz weiterer Spezialergebnisse. Es entsteht eine unendliche Hierarchie von Spezialergebnissen.

.

Für Aussagen gibt es die Möglichkeit die Bivalenz der Aussagen zugunsten eines dritten Wahrheitswertes (Wahrheitswertlücke) aufzugeben. Neben der Idee einen neuen Wahrheitswert wie „unbestimmt“ oder „sinnlos“ einzuführen, gibt es die Vorschläge die beiden Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ zu „sowohl wahr als auch falsch“ bzw. „weder wahr noch falsch“ (Van Fraassen | Priest, Dowden) zu kombinieren. Ebenfalls dazu gehört die Theorie der Revision der Wahrheitextension (Gupta, Herzberg), die es Aussagen erlauben ihren Wahrheitswert durch Anwendung einer Revisionsregel ständig zu verändern. Eine Aussage mit einem instabilen Wahrheitswert wird unfundiert genannt. Selbst die Lösung von Aristoteles, die zwischen Wahrheit „schlechthin“ und „in gewisser Hinsicht“ unterscheidet, weist in diese Richtung.

In der Funktionstheorie sind zirkelhaften Definitionen durchaus erlaubt. Allerdings handelt es sich dabei ggf. um nichtterminierende Aufrufe und somit nichtterminierende Funktionen. Das Spezialergebnis lautet hier also „terminiert nicht“. Die Frage, ob es sich bei dem kontingenten Zirkel um einen terminierenden Aufruf handelt, ist davon abhängig, ob Kurzauswertungen (lazy evaluations) zulässig sind. Kurzauswertung Boolescher Ausdrücke bedeutet hierbei, dass die Auswertung abgebrochen wird, sobald das Ergebnis feststeht. Hier ist es dann möglich, dass einige Teile eines Ausdrucks gar nicht oder nur unvollständig ausgewertet werden. Ob der wohlfundierte Zirkel terminiert ist davon abhängig, ob wir logische Optimierungen zulassen. Logische Optimierung Boolescher Ausdrücke bedeutet hierbei, dass der Ausdruck in einen logisch äquivalenten (kürzeren) Ausdruck überführt wird. In der Regel wird hierbei vom Gesetz des ausgeschlossenen Dritten bzw. des ausgeschlossenen Widerspruchs gebrauch gemacht.

Wir können Funktionen aber auch als digitale sequentielle Schaltungen interpretieren. Im Falle eines gutartigen Zirkel kann dann im Sinne eines Gedächtnisses der letzte gültige Wert zurückgegeben werden. Ein bösartiger Zirkel sorgt zusammen mit den Gatterlaufzeiten dafür, dass das Ergebnis sich ständig ändert und somit instabil ist. Somit hätten wir hier zwei Spezialergebnisse.

## 3. Semantische Typisierung

Auch im Fall der semantischen Typisierung wird die Syntax beibehalten und die Semantik korrigiert. Dabei wird eine semantische Typisierung eingeführt, die Antinomien mit einem Typfehler begründen. Wichtig für diese Lösung ist, dass hierdurch entweder eine unendliche aufsteigende Hierarchie von Typen entsteht oder aber auf einer höheren Stufe eine Einschränkung vorgenommen werden muss, um dem Auftreten des verstärkten Lügner, der ein Ausweichen auf eine noch höhere Stufe erzwingt, vorzubeugen. In der Regel ist diese Typisierung unscharf, so dass nicht für alle Objekte der Typ eindeutig bestimmt werden kann bzw. lediglich eine relative Typisierung möglich ist.

Das Prinzip läuft stets nach folgenden Schema ab: Der Begriff der Wahrheit ist stets unvollständig oder widersprüchlich. Wenn wir den Begriff der Wahrheit konsistent definieren, so schließen wir zwangsläufig einige intuitiv gültigen Wahrheiten aus. Um diese ausgeschlossenen aber gültigen Wahrheiten ebenfalls berücksichtigen zu können, müssen wir den Begriff der Wahrheit neu definieren ohne die ursprüngliche Definition zu zerstören (Wahrheit zweiter Stufe). Anschließend erkennen wir, dass auch mit dieser neuen Definition nicht alle intuitiv gültigen Wahrheiten erfasst werden, da durch die Definition der Wahrheiten zweiter Stufe neue intuitiv gültige Wahrheiten entstanden sind. . . .

.

Aussagen werden nach Tarski verschiedenen Sprachebenen zugeordnet. In der Regel reicht dabei eine relative Typisierung in Objekt- und Metaebene aus. Eine Aussage darf nur über die Objektebene reden bzw. falls sie über die Metaebene redet, ist sie automatisch von einem höheren Typus (Meta-Metaebene). Dadurch entsteht eine unendlich gestufte Sprachhierarchie mit jeweils einem eigenen Wahrheitsprädikat. Es ist auch möglich von einer einzigen Sprachebene aber unendlich vielen Wahrheitsprädikaten durch unendlich gestufte Prädikatenausdrücke auszugehen, was unter anderem in der Russelschen Stufen- und Typenhierarchie versucht wurde. Der Satz „Dieser Satz ist eine falsche Aussage vom Typ i.“ ist demnach tatsächlich „falsch“ und eine Aussage von einem Typus $j$ mit $j > i$.

Das zweite Cantorsche Diagonalverfahren erzwingt die Existenz einer unendlichen Hierarchie von Mächtigkeiten und somit die Existenz verschiedener Mengen-Typen. Durch diese Hierarchie ist es möglich der Antinomie der Mengenlehre eine Zeit lang auszuweichen. Komplett verhindern kann diese Hierarchie die Antinomie allerdings nicht.

Ein zur axiomatischen Mengenlehre alternatives Mengenmodell ist das NGB-System (Klassentheorie). In dieser Theorie sind zirkelhafte Definitionen erlaubt, allerdings kann es sich dabei um Unmengen handeln. Der ursprüngliche Typ „Menge“ heißt jetzt „Klasse“, welcher nun in die beiden semantischen Untertypen „Menge“ und „Unmenge“ unterteilt wird. Unmengen sind dabei Klassen, die (wegen ihrer Größe) nicht Element einer anderen Klasse sein können. Die Klasse aller Mengen ist eine Unmenge. Gleiches gilt für die Klasse aller Ordinalzahlen, die Russelsche Klasse, ...

## 4. Der verstärkte Lügner / Der Sohn des Lügners

Der verstärkte Lügner oder auch Sohn des Lügners genannt ist eine spezielle Form der Lügner-Antinomie.

Die am häufigsten anzutreffenden Lösungstrategien sind die des Spezialergebnisses oder der semantischen Typisierung. In beiden Fällen wird dem Zirkel (in der Regel nur dem bösartigen) ein eigenes Spezialergebnis bzw. ein eigener Typ eingeräumt.

Die Antinomie des Lügners kann durch Einführung eines solchen Spezialergebnisses stets gelöst werden: Sei z.B. $f(x) := x(x) + 1$, so gilt $f(f) = f(f) + 1$, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Ein konsistentes Funktionsmodell muss demzufolge zwangsläufig ein weiteres Ergebnis, in diesem Fall „terminiert nicht", bereitstellen.

Offensichtlich kann durch das Spezialergebnis das Beispiel gerettet werden, die Funktion $f(x)$ terminiert für $f(f)$ nicht. Es stellt sich nun aber heraus, dass die ursprünglichen Lügner-Antinomien zwar gelöst wurden, durch die Lösung aber gleichzeitig neue Lügner-Antinomien (verstärkte Lügner) entstanden sind: „$f(x) := x(x) + 1$, wenn $x(x)$ terminiert", ansonsten „$f(x) := 0$".

Und das ganze Spiel beginnt von vorn...

.

Generell gilt: Antinomien lassen sich durch Einführung eines oder mehrerer Spezialergebnisse bzw. eines oder mehrerer semantischer Typisierungen stets lösen. Allerdings tritt dann stets auf einer höheren Ebene der verstärkte Lügner auf, die Antinomie wurde also nur verschoben aber nicht wirklich gelöst. Eine endgültige Lösung ist daher nur durch Verbot bzw. Einschränkung der Zirkelhaftigkeit möglich. Hierdurch werden aber stets auch intuitiv gültige Objekte ausgeschlossen und damit zwangsläufig eine Unvollständigkeit herbeigeführt.

Für Sprachtheorien mit mehr als zwei Wahrheitswerten lautet der verstärkte Lügner: „Dieser Satz ist nicht wahr."

Für die Tarski-Wahrheitshierarchie lautet der verstärkte Lügner: „Dieser Satz ist in keiner Stufe der Tarski-Hierarchie wahr."

Für das NGB-System (Russelsche Menge ist eine Unmenge) lautet der verstärkte Lügner: „Klasse aller sich selbst nicht enthaltenen Klassen."

Eine Theorie kann niemals seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen. Somit sind in der Regel nur relative Widerspruchsfreiheitsbeweise möglich, die das Problem der Widerspruchsfreiheit einer Theorie auf die Widerspruchsfreiheit einer anderen Theorie verschieben. Die Frage wird damit aber nie wirklich beantwortet.

Gegeben sei eine Maschine mit einem Selbsttestalgorithmus, also einem Unterprogramm zur Überprüfung der syntaktischen und semantischen Korrektheit des gesamten Programmcodes. Diese Unterprogramm beantwortet somit die Frage „Bin ich korrekt?". Ein solcher Test ist unter anderem nach einer Übertragung des gesamten Programmes über einen gegen Übertragungsfehler nicht 100%ig gesicherten Übertragungskanals nötig. Falls der Selbsttest fehlschlägt, ist das Programm garantiert fehlerhaft. Wenn das Programm nun aber fehlerhaft ist (z.B. einige Bits im Programmcode sind gekippt), könnte ja auch der Selbsttestalgorithmus defekt sein. Dann könnte er aber wahr liefert obwohl er hätte falsch liefern müssen. Somit ist ein erfolgreicher Selbsttest nicht 100%ig zuverlässig. Der Testalgorithmus kann also die Korrektheit der Antwort nicht 100%ig sicherstellen, ein ‚ja' kann daher nur als ‚unentscheidbar' gewertet werden. Es ist nun aber möglich das Programm um ein Zusatzprogramm zu erweitern, das den Korrektheitstest des ursprünglichen Programms zuverlässig durchführen könnte. Dieser Test ist aber nur zuverlässig, solange wir nicht die Korrektheit dieses Zusatzprogramms in Frage stellen. Die Unentscheidbarkeit bei „Ist das Programm korrekt?“ wird somit lediglich auf die Frage „Ist das Zusatzprogramm korrekt?“ verschoben, aber nicht gelöst.

## 5. Unvollständigkeit und Widersprüchlichkeit

Für die Lösung der Antinomien gibt es zwei konkurrierende Ziele. Zum einen sollte eine entsprechende Theorie konsistent, also widerspruchsfrei sein. Zum anderen soll sie aber auch vollständig sein.

Bei der Analyse der Antinomie der Mengenlehre haben wir festgestellt, dass eine Mengentheorie zwangsläufig stets unvollständig oder widersprüchlich ist. Gleiches haben wir bei der Analyse der Richardschen Antinomie und im vorangehenden Abschnitt festgestellt. Aufgrund der Isomorphie der universellen Theorien gilt diese Erkenntnis auch für sämtliche anderen antinomischen Theorien.

Somit ist das gleichzeitige Erreichen beider Ziele niemals möglich, so dass jede Lösung des Antinomie-Problems zwangsläufig unbefriedigend sein wird: Jede entsprechende Theorie ist entweder widersprüchlich und somit wertlos oder aber unvollständig. Die Antinomie des verstärkten Lügners liefert uns stets einen Zeugen für die Widersprüchlichkeit oder Unvollständigkeit.

# Ausleitung

## Nachwort

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

so ist das manchmal im Leben. Nicht immer gibt es ein Happy End. So auch hier: Wir können nicht alles beweisen, nicht alles entscheiden, nicht alles formalisieren. Es gibt keine universelle Theorie für die Mengenlehre oder die natürliche Sprache. Und wir wissen nicht einmal, ob die Grundlage der Mathematik wirklich frei von Widersprüchen ist.

Aber: Wir haben eine Vielzahl von logischen Paradoxien kennen gelernt, diese von verschiedensten Seiten beleuchtet und brauchen daher keine Angst mehr vor dem Phänomen „Antinomie“ zu haben. Mehr noch: Die Antinomien haben ja gerade die interessantesten Erkenntnisse der Mathematik (Existenz überabzählbarer Mengen, Nichtentscheidbarkeit des Halteproblems, Gödelsche Unvollständigkeitssätze) hervorgebracht und unseren Blick für das bis heute unterschätzte Phänomen der zirkelhaften Selbstbezüglichkeit deutlich geschärft.

Nicht ganz unwesentlich ist auch, dass der Beweis zur Existenz überabzählbarer Mengen die Tür zu einer völlig neuen Welt, der Welt der unendlichen Mengen, geöffnet hat. In dieser Welt wurden bereits viele wichtige Entdeckungen gemacht und es werden sicherlich auch in der Zukunft noch viele folgen. Eine weitergehende Analyse der Antinomie sowie angrenzender Themen, wie z.B. auch des Phänomens der unkonstruktiven Beweisverfahren, bringt somit auf jeden Fall ein tieferes Verständnis für die

Grundlagen der Welt, speziell der Mathematik und Sprache, mit sich.

In diesem Sinne kann man sich nur wünschen, dass es auch in Zukunft Personen geben wird, die sich mit scheinbar sinnlosen, nutzlosen, wertlosen bzw. „abgegrasten“ Themen beschäftigen und die Welt um weitere wichtige Erkenntnisse bereichern werden. Möge dieses Werk eine solche Bereicherung sein.

Mit freundlichem Gruß

Peter Weigel

# Literaturverzeichnis

[Ga38] Galileo Galilei. *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige.* Abhandlung, 1638.

[Ca74] Georg Cantor. *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* Crelles Journal für Mathematik, Band 77, 1874, Seite 258–262.

[Ca95] Georg Cantor. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Mathematische Annalen, Band 46, 1895, Seite 481–512; Band 49, 1897, Seite 207–246.

[Ca32] Georg Cantor. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Hrgs. E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Springer Verlag, Berlin 1932, Neudrucke: Hildesheim 1962, Berlin Heildelberg New York 1980. ISBN 3-540-09849-6 / 0-387-09849-6.

[Ca91] Georg Cantor. *Briefe.* Hrsg. Herbert Meschkowski und Winfried Nilson. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York ... 1991, ISBN 3-540-50621-7.

[Gö31] Kurt Gödel. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.* Monatshefte für Mathematik und Physik, Band 38, 1931, Seite 173–198.

[Tu36] Alan M. Turing. *On computable numbers. With an application to the Entscheidungsproblem* Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, 42, 1936.

[Br92] Elke Brendel. *Die Wahrheit über den Lügner. Eine philosophisch-logische Analyse der Antinomie des Lügners.* de Gruyter, 1992.

[Sm93] Raymond M. Smullyan. *Satan, Cantor und die Unendlichkeit. Und 200 weitere verblüffende Tüfteleien.* Birkenhäuser, 1993 / Insel Taschenbuch, Frankfurt 1997, ISBN 3-458-33599-4.

[He98] Klaus von Heusinger. *Antinomien. Zur Behandlung von semantischen Paradoxien, ihren Risiken, Nebenwirkungen und Unverträglichkeiten.* Linguistische Berichte 173, 1998, 3–41.

An dieser Stelle danke ich dem Institut für Informatik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Hätten wir nicht im Jahr 2002 die Hausaufgabe aufbekommen, zu beweisen, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen überabzählbar ist, hätte ich mich nie mit der Thematik der unendlichen Mengen, der Antinomie der Mengenlehre und letztendlich mit dem Phänomen der logischen Paradoxien in der natürlichen Sprache und isomorphen Theorien beschäftigt.

Ebenfalls unbeabsichtigt beteiligt an der Erstellung dieses Buches war mein Arbeitgeber, die GISA GmbH, der ich auf diesem Weg ebenfalls danken möchte. Die GISA GmbH hat mich Ende 2009 gebeten meine bis dahin angehäuften Überstunden und Resturlaubstage schnellstmöglich abzubummeln und mich daher im Herbst bzw. Winter 2009/2010 für ca. 3 Monate beurlaubt. Diese Beurlaubung hat es erst möglich gemacht, dass ich die Ergebnisse der im Jahr 2002/2003 getätigten Analysen wieder ausgraben, ergänzen, strukturieren und hiermit als Buch veröffentlichen konnte.

**Zum Autor:** Peter Weigel wurde am 27. August 1979 in Halle an der Saale geboren. Er studierte von 1999 bis 2004 Informatik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Vertiefungsrichtung Theoretische Informatik) und ist seit 2005 bei der GISA GmbH als SAP-Anwendungsentwickler bzw. seit 2010 als Prozess- und IT-Berater für den SAP Solution Manager tätig.