Jenseits der Endlichkeit.

Eine Einführung in die cantorsche Unendlichkeitslehre.

Diplom-Informatiker
Peter Weigel

Januar 2010

Peter Weigel. Jenseits der Endlichkeit. Eine Einführung in die cantorsche Unendlichkeitslehre. VDM Verlag Dr. Müller, Saarbrücken, Oktober 2008, ISBN 978-3-639-08990-5.

Peter Weigel. Jenseits der Endlichkeit. Eine Einführung in die cantorsche Unendlichkeitslehre. www.unendlichkeiten.de, Halle/Saale, Januar 2010.

Dieses Buch dient der Einführung in die cantorsche Unendlichkeitslehre, eines der faszinierendsten Konzepte der Mathematik:

Es werden Qualitätsunterschiede innerhalb des potentiell unendlich Kleinen aufgedeckt, die Gleichmächtigkeit verschiedener Zahlmengen (z.B. Menge der natürlichen Zahlen und Menge der ganzen Zahlen) bewiesen, die Gleichmächtigkeit verschiedener Punktmengen (z.B. Punkte einer endlich ausgedehnten Geraden und Punkte einer unendlich ausgedehnten Geraden) gezeigt und es wird belegt, dass es innerhalb des aktual unendlich Großen Mächtigkeitsunterschiede gibt. Untersuchungen zu Ordinal- und Kardinalzahlen, zu aktual unendlich kleinen Größen, zu den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen, zum Halteproblem für Turingmaschinen und zur Menge aller Mengen inklusive Antinomie der Mengenlehre runden den Gesamtüberblick ab.

Erstmals in diesem Buch ist, neben den beiden cantorschen Beweisen zur Überabzählbarkeit des arithmetischen Kontinuums, ein Beweis zur Überabzählbarkeit des geometrischen Kontinuums zu finden. Obwohl Georg Cantor starke Zweifel an seiner Existenz hatte, enthält diese Arbeit auch einen Beweis zur Existenz aktual unendlich kleiner Größen. Außerdem ist nicht das Original, sondern eine anschaulichere Abwandlung, des ersten Cantorschen Diagonalverfahrens enthalten. Diese und weitere Besonderheiten machen die folgenden Seiten zu einer unverzichtbaren Lektüre für Mathematikschüler, -studenten und -dozenten im Umfeld der Mengen- und Mächtigkeitslehre.

Ich widme dieses Buch dem Mathematiker Georg Cantor. In Erinnerung an einen großartigen Geist und an eine Zeit, als die Mathematik noch jung, unerforscht und voller Überraschungen war…

Inhaltsverzeichnis

Warum entstand dieses Buch?

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

gleich werden wir gemeinsam auf die Reise gehen, eine Reise in eine fremde Welt voller überraschender Merkwürdigkeiten. Und wie jede Reise beginnt auch diese hier mit einer Vorbereitung bzw. der Einleitung:

Bereits vor ca. 2500 Jahren befassten sich zahlreiche griechische Philosophen, wie Zenon von Elea, Eudoxos von Knidos, Aristoteles oder Archimedes, mit dem Phänomen der Unendlichkeit. Diesen und weiteren Forschern haben wir wichtige Erkenntnisse über das Unendliche zu verdanken. Als Folge dieser Forschungen erfreute sich das unendlich Kleine bzw. unendlich Große sowohl in der Analysis, als auch in der Geometrie, großer Beliebtheit. Dennoch wurden zwischen 200 v.Chr. und dem Ende des 19. Jahrhunderts, abgesehen von kleinen Ausnahmen wie Galileo Galilei (1638) oder Bernhard Bolzano (1851), keine nennenswerten Fortschritte auf dem Gebiet der Unendlichkeitsuntersuchung erzielt. Diese wenigen gemachten Entdeckungen ließen allerdings paradoxe Eigenschaften des Unendlichen erkennen. Daher ging man bis Ende des 19. Jahrhunderts davon aus, dass sich die Unendlichkeit nicht sinnvoll mathematisch fassen bzw. untersuchen lässt. Erst am 7. Dezember 1873 gelang es Georg Cantor, einem Mathematiker aus Halle an der Saale (Deutschland, Sachsen-Anhalt), gegen enormen Widerstand anderer Mathematiker, die Unendlichkeit im Sinne einer mathematischen

Theorie einzufangen und zu untersuchen. Ganz nebenbei begründete er damit die Grundlage der heutigen Mathematik, die Mengenlehre.[1]

Obwohl ich in Halle an der Saale, der Wirkungsstädte Georg Cantors, geboren und aufgewachsen bin, kam ich erst während des Studiums der Informatik an der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg in Kontakt mit dem Phänomen der Unendlichkeit. Und das eher durch Zufall: Im Sommersemester 2002 sollten wir als Hausaufgabe der Veranstaltung „Programmiersprachen“ zeigen, dass sich die Potenzmenge der natürlichen Zahlen nicht abzählen lässt.[2] Weder ich, noch einer meiner Kommilitonen konnte diese Aufgabe lösen, so dass uns der Beweis von der Übungsleiterin präsentiert werden musste. Dieser Beweis hat mich dann allerdings so fasziniert, dass ich mich ausführlicher mit diesem Thema beschäftigte.

Bei meinen Recherchen stellte ich fest, dass es dank der Leistungen Georg Cantors und vieler anderer Mathematiker heute zahlreiche Bücher gibt, die sich ausschließlich oder teilweise mit der (mathematischen) Unendlichkeit beschäftigen:
Da gibt es Bücher, die sich spielerisch mit dem Unendlichen auseinandersetzen, indem unzusammenhängend einige Erkenntnisse über die Unendlichkeit in paradox erscheinende Geschichten oder Knobeleien verpackt werden. Der Leser wird wie ein kleines Kind an die Hand genommen und an einigen Erkenntnissen und Beweisen vorbeigeführt, bleibt jedoch über die wahre Natur des Unendlichen unaufgeklärt.
Dann gibt es Bücher, die sich schwerpunktmäßig mit der Geschichte der Unendlichkeitsuntersuchung beschäftigen und dabei zeigen, dass die Unendlichkeit bereits seit langer Zeit untersucht wurde, welche Schwierigkeiten es beim Entwickeln einer

[1] Der 07.12.1873 gilt als Geburtstag der transfiniten Mengenlehre, da Georg Cantor an diesem Tag einen Beweis zur Überabzählbarkeit des Kontinuums fand.

[2] Ich habe keine Ahnung was das mit Programmiersprachen zu tun hat.

Unendlichkeitstheorie gab, und dass die entscheidenden Entdeckungen zur Unendlichkeit auf wenige Personen (aber nicht ausschließlich Georg Cantor!) zurückgehen. Unendlichkeitsbeweise werden hier aber nur vereinzelt und sehr oberflächlich behandelt.
Und es gibt Fachbücher, die sich hauptsächlich an den Mathematikprofessor bzw. -studenten richten. Die Unendlichkeit wird als normale Eigenschaft von Mengen angesehen und damit entzaubert. Es werden Untersuchungen durchgeführt und Beweise entwickelt, die den Nicht-Mathematiker aber auch den Mathematik-Einsteiger überfordern. Die Schönheit und Faszination der Unendlichkeit ist verschwunden, zumal die Grundlagen einer Unendlichkeitstheorie in der Regel einfach übersprungen oder sehr verkürzt dargestellt werden.

Bücher, die sich spielerisch mit dem Unendlichen auseinandersetzen oder sich der Geschichte der Unendlichkeitsuntersuchung widmen, eignen sich hervorragend, um das Interesse des Lesers an dem Phänomen der Unendlichkeit zu wecken. Fachbücher zum Thema Mengenlehre und Mächtigkeitslehre haben als Zielgruppe Mathematikprofessor bzw. -studenten und sind für intensive Forschungen auf dem Gebiet der Mengenlehre bzw. Mächtigkeitslehre geeignet. Doch was machen Leser, deren Interesse an der Unendlichkeit geweckt wurde, die nun also mehr erfahren möchten, sich aber (noch) nicht als Forscher betätigen wollen?

Meiner Meinung nach herrscht in der Gruppe der Fachbücher ein Mangel an Büchern, die einen Gesamtüberblick über die Grundlagen der Unendlichkeit geben und somit als echte „Einführung in die Unendlichkeitslehre“ dienen. Ein solches Buch sollte einen behutsamen Einstieg in die Welt des Unendlichen liefern, die wichtigsten Untersuchungsmethoden vorstellen und die schönsten Beweise für die überraschendsten Erkenntnisse enthalten. Auch sollte es so geschrieben sein, dass es als Grundlage für den Schulunterricht dienen könnte, denn die Unendlichkeit kann Schülern durchaus zugemutet werden, zumal sie (gut dargestellt) weniger abstrakt als die Analysis bzw. analytische Geometrie sein kann.[3]

Dieses Buch stellt meinen Versuch dar, die aufgezeigte Lücke zu schließen und gleichzeitig meine eigenen Ideen zu verarbeiten. Die Vorlage entstand in den Jahren 2002 bis 2005, wurde im Jahr 2008 überarbeitet/ergänzt und ist das Ergebnis intensiver Beschäftigung mit dem Thema der Unendlichkeit, der Antinomie der Mengenlehre, der Antinomie der natürlichen Sprache sowie dem Halteproblem für Turingmaschinen und den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen während und nach Abschluss des Informatikstudiums an der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg. Ob mein Versuch geglückt ist, können nur Sie, durch Lesen der folgenden Kapitel, entscheiden. Ich wünsche Ihnen viel Spaß dabei.

Mit freundlichem Gruß

Peter Weigel

[3] Es lässt sich jedoch nicht vermeiden, dass ein gewisses mathematisches Grundwissen, hauptsächlich auf dem Gebiet der Mengenlehre, vorausgesetzt werden muss.

KAPITEL 1

Was ist Unendlichkeit?

Was ist die Unendlichkeit? Besitzen wir direkte Erfahrungen mit der Unendlichkeit? Gibt es das Unendlich Kleine oder Große in der Realität? Gibt es verschiedene Formen der Unendlichkeit? Haben Unendlichkeitsuntersuchungen einen realen Nutzen?

Diese und weitere Fragen ergeben sich zwangsläufig, wenn man sich mit der Unendlichkeit beschäftigt. Leider lässt sich nicht jede Frage eindeutig beantworten: Auf die zweite und dritte Frage gibt es zum Beispiel keine Antwort und wird es auch niemals geben. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass wir die echte Realität nicht kennen. Wir nehmen unsere Umwelt nur durch unsere Sinne *Sehen*, *Hören*, *Riechen*, *Schmecken* und *Fühlen* wahr. Doch diese Sinne können getäuscht werden bzw. sind bei weitem nicht ausreichend um die Realität zu erfassen. Für uns ist Realität das, was unser Gehirn mit Hilfe der Sinneneindrücke in unserem Kopf entstehen lässt. Diese scheinbare Realität kann sich aber grundlegend von der echten Realität unterscheiden: Vielleicht sind wir alle nur Figuren in einem Roman, Bestandteile eines Traumes oder Teil einer riesigen Computersimulation?!

Außerdem nehmen verschiedene Menschen die Realität unter Umständen vollkommen unterschiedlich wahr. Diese unterschiedliche Wahrnehmung hat nicht unbedingt etwas mit Farbenblindheit oder Ähnlichem zu tun. Bereits eine einfache Frage macht das Problem deutlich: „Welche Farbe hat eine rote Rose?“ Die Antwort lautet scheinbar eindeutig „rot“. Damit haben wir aber eine sehr unbefriedigende Antwort auf die Frage gefunden, denn es stellt sich sofort die nächste Frage: „Wie sieht rot eigentlich aus?“ Diese Frage ist nicht beantwortbar! Das Gehirn erhält schließlich nur die Information, dass unsere Augen etwas Rotes betrachten und erkennt die Farbe Rot durch Vergleich mit früher Gesehenem. Woher soll es (und somit wir) aber wissen, wie rot aussieht? Außerdem ist rotes Licht in Wahrheit einfach nur eine „farblose“ elektromagnetische Welle bestimmter Wellenlänge, die von unserem Gehirn speziell interpretiert wird. Wie wir die Farbe Rot wahrnehmen, hat somit nichts mit der Realität zu tun. Es ist sogar durchaus möglich, dass sich diese Interpretation bei verschiedenen Menschen unterscheiden, dann wäre das Rot des einen das Grün des anderen ist. Vielleicht haben wir ja alle die gleiche Lieblingsfarbe, nur durch die unterschiedliche Wahrnehmung haben wir scheinbar verschiedene!?

Somit macht es keinen Sinn nach der Existenz des Unendlichen in der echten Realität zu fragen. Sehr wohl können wir aber nach der Existenz der Unendlichkeit in der scheinbaren Realität (also dem was wir für die Realität halten) fragen. Die Antwort ist ernüchternd: Nach dem bisherigen Erkenntnisstand gibt es keine Unendlichkeit. Das Universum besitzt lediglich eine endliche Ausdehnung, es gibt im gesamten Universum nur eine endliche Zahl an Atomen, es gibt nur eine endliche Menge an Energie, die Geschwindigkeit ist durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt, Materie lässt sich nicht beliebig teilen (auch wenn die Wissenschaft in immer kleinere Strukturen vordringt), die Zeit hat mit dem Urknall begonnen und wird irgendwann enden. – Diese Aufzählung ließe *endlos* fortsetzen, sollte aber klar machen, dass die Wissenschaft bisher weder das unendlich Große noch das unendlich Kleine tatsächlich nachweisen konnte. Und an den Stellen, wo wir dem Unendlichen sehr nahe kommen, treten Unschärfeerscheinungen auf, die ein weiteres Vordringen verhindern bzw. wo Begriffe wie „Zeit“ und „Raum“ bzw. „Endlichkeit“ und „Unendlichkeit“ an Bedeutung verlieren.

Die Unendlichkeit ist somit eine reine Erfindung des menschlichen Geistes und hat auf den ersten Blick nichts mit der (scheinbaren) Realität zu tun. Umso erstaunlicher ist es, dass Unendlichkeitsuntersuchungen trotz der Realitätsferne sinn machen. Es hat sich nämlich in der Physik und Mathematik herausgestellt, dass sich viele Vorgänge bzw. Erscheinungen durch Abstraktion und Vereinfachung leichter mathematisch beschreiben lassen. Das trifft auch für die Unendlichkeit zu: Es ist meist einfacher davon auszugehen, dass sich Licht mit unendlicher Geschwindigkeit bewegt, statt die minimale Zeitverzögerung zu berücksichtigen. Es ist auch einfacher davon auszugehen, dass eine mit einem Bleistift gezogene Line unendlich viele Punkte enthält, statt die Anzahl der Atome tatsächlich bestimmen zu wollen.

Bevor wir uns aber genauer mit der Unendlichkeit beschäftigen werden, müssen wir noch einige Begriffe klären:

(1) Die Leerheit (L): Die kleinste Mächtigkeit hat das *Nichts*. Im mathematischen Sinne würde dem Nichts die *leeren Menge* (eine Menge die nichts enthält) bzw. die natürlichen Zahl 0 entsprechen.

(2) Die Endlichkeit (E): Wir erhalten eine endliche Menge, indem wir der leeren Menge ein beliebiges Element, z.B. eine natürliche Zahl, hinzufügen. Fügen wir noch ein, bisher nicht enthaltenes, Element hinzu, besitzen wir bereits eine zwei Elemente enthaltende, endliche Menge. Allgemein gilt: Fügt man einer endlichen Menge ein neuen Elementes hinzu, so erhält man eine endliche Menge. Diese neue Menge ist mächtiger als die alte, enthält also mehr Elemente.

(3) Das potentiell unendlich Kleine (PUK) und das potentiell unendlich Große (PUG): Denken wir uns nun

den Vorgang des Hinzufügens eines bisher nicht enthaltenen Elementes endlos fortgesetzt. Eine solche Menge wäre stets endlich, aber beliebig groß werdend. Allgemein wird das potentiell Unendlich als „endliche, aber beliebig groß bzw. klein werdende, jede beliebige endliche Grenze über- bzw. unterschreitende, Größe“ beschrieben. Es handelt sich hierbei also um einen Vorgang und nicht, wie bei der Leerheit bzw. Endlichkeit, um einen Zustand. Das potentiell unendlich Kleine finden wir bei Grenzwertbetrachtungen unter anderem in der Differential- und Integralrechnung.

(4) Das diskrete aktual unendlich Große ($DAUG$): Denken wir uns nun den zuvor beschriebenen Vorgang als abgeschlossen. Das Ergebnis wäre eine aktual unendlich große Menge bestehend aus unendlich vielen, diskreten Elementen. Die Menge der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen oder der rationalen Zahlen sind solche Mengen. Das aktual unendlich Große finden wir, wie die Beispiele zeigen, in der Mengenlehre in Form von Zahlmengen.

(5) Das kontinuierliche aktual unendlich Große ($KAUG$): Wir haben bereits einen anderen Zugang zur Unendlichkeit kennen gelernt. Im mathematischen Sinne besteht eine Linie beliebiger Länge aus unendlich vielen, kontinuierlich (=lückenlos) angeordneten Punkte. Das kontinuierlich unendlich Große ist somit in der Geometrie in Form von Punktmengen anzutreffen.

(6) Das aktual unendlich Kleine (AUK): Auch das aktual unendlich Kleine ist in der Geometrie auffindbar, sobald wir nach der Breite bzw. dem Volumen eines einzelnen Punktes fragen.

Wollten wir die gerade genannten Begriffe nach ihrer „Größe“ ordnen, so würden wir folgendes Ergebnis erhalten: Die Leerheit ist kleiner als das potentiell unendlich Kleine, sofern wir das Vergleichen von Zuständen und Vorgängen erlauben, da das potentiell unendlich Kleine der 0 bzw. der Leerheit zwar beliebig nahe kommt, diese aber nie erreicht. Zwischen der Leerheit und dem potentiell unendlich Kleinen befindet sich allerdings noch das aktual unendlich Kleine, da diese Form des unendlich Kleinen größer als 0, aber kleiner als jede endliche Größe ist. Das potentiell unendlich Kleine ist kleiner als die Endlichkeit, da das potentiell unendliche Kleine der Leerheit näher kommt als jede Endlichkeit. Das potentiell unendlich Große ist dagegen größer als die Endlichkeit, da eine potentiell unendliche Menge[4] ab einem gewissen Zeitpunkt jede endliche Menge bezüglich der Mächtigkeit „überholt“. Die aktuale Unendlichkeit ist wiederum größer als die potentielle Unendlichkeit, da eine potentiell unendliche Menge in Wahrheit stets endlich ist, während eine aktual unendliche Menge wahrhaftig unendlich ist:

$$L < AUK < PUK < E < PUG < AUG.$$

Doch wie sieht es mit der Beziehung zwischen diskreter Unendlichkeit und kontinuierlicher Unendlichkeit aus? Existieren innerhalb der potentiellen und aktualen Unendlichkeit analog zur Endlichkeit gewisse Abstufungen? In wieweit unterscheidet sich die Endlichkeit von der Unendlichkeit? Diesen und weiteren mit der Mächtigkeit des Unendlichen im Zusammenhang stehenden Fragen, widmen wir uns in den nun folgenden Kapiteln.

[4]Wir benutzen das Konzept der „potentiell unendlichen Mengen“ lediglich in diesem Kapitel zur Abgrenzung des potentiell Unendlichen vom aktual Unendlichen bzw. Endlichen. In der Mathematik gibt es keine (Untersuchungen zu) potentiell unendlichen Mengen.

KAPITEL 2

Gibt es verschiedene potentielle Unendlichkeiten?

Das potentiell Unendlich ist eine variable, vom Betrag her beliebig groß oder klein werdende, aber stets endliche, Größe. Die Unterscheidung des potentiell unendlich Kleinen vom potentiell unendlich Großen ist somit problemlos möglich: Das potentiell unendlich Kleine nähert sich der 0 beliebig nahe an, während sich das potentiell unendlich Große beliebig weit von der 0 entfernt. Diese Feststellung gilt für alle Formen des potentiell unendlich Kleinen bzw. Großen. Eine feinere Unterscheidung ist auf diesem Weg also nicht möglich.

Da es sich aber bei der potentiellen Unendlichkeit um einen Vorgang handelt, in dessen Verlauf eine Variable x verschiedene beliebig groß oder klein werdende Werte annimmt, ist mit einer konkreten potentiellen Unendlichkeit stets eine konkrete beliebig groß oder klein werdende Folge von Zahlen verbunden. Eine potentiell unendliche Summation dieser Zahlen könnte vielleicht eine feinere Unterscheidung ermöglichen…

Divergenz der Summe der Glieder konstanter oder monoton wachsender Folgen

Stellen wir uns vor, wir hätten ein Seil von einer Länge, die dem Durchmesser der Erde entspräche. Stellen wir uns nun vor, wir hätten k ($k \in \mathbb{N}$) solche Seile und würden diese miteinander verknüpfen. Das Ergebnis wäre ein sehr langes, aber dennoch endliches, Seil. Stellen wir uns jetzt vor, wir *hätten beliebig viele solche Seile. Würden wir diese nacheinander miteinander verknüpfen, so erhielten wir offensichtlich ein potentiell unendlich langes Seil. Als nächsten wollen wir uns vorstellen, wir hätten beliebig viele Tennisbälle und würden diese Schritt für Schritt nebeneinander aufreihen. Offensichtlich hätten wir auch hier eine potentiell unendlich lange Kette aneinander aufgereihter Tennisbälle, auch wenn der Durchmesser eines Tennisballes deutlich kleiner ist, als die Länge eines Seils. Hätten wir beliebig viele Sandkörner und würden diese nebeneinander Aufreihen, erhielten wir das gleiche Ergebnis. Unter diesem Hintergrund ist es sicherlich leicht einzusehen, dass auch die Aneinanderreihung unendlich vieler Atome potentiell unendlich lang ist, auch wenn Atome um Größenordnungen kleiner sind als Sandkörner.*

Mathematisch lassen sich diese Aneinanderreihungen folgendermaßen verallgemeinern:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1 = \underbrace{1+1}_{2} + \underbrace{1+1}_{2} + \underbrace{1+1}_{2} + \underbrace{1+1}_{2} + \underbrace{1+1}_{2} + \ldots = \infty$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1 = \sum_{i=1}^{\infty} 2 = \underbrace{2+2}_{4} + \underbrace{2+2}_{4} + \underbrace{2+2}_{4} + \underbrace{2+2}_{4} + \ldots = \infty$$

bzw. allgemein

$$\sum_{i=1}^{\infty} d = d + d + d + d + d + d + d + d + d + d + \ldots = \infty$$

Hierbei steht d für eine beliebige reelle Zahl, also zum Beispiel für den Erddurchmesser, den Durchmesser eines Tennisballes, eines Sandkornes oder eines Atoms.[5]

[5] Der Ausdruck $\sum_{i=a}^{b} f(i)$ steht für $f(a) + f(a{+}1) + f(a{+}2) + \ldots + f(b{-}1) + f(b)$.

Wir können zusammenfassen: Die potentiell unendliche Summation einer konstanten Größe ist stets potentiell unendlich groß. Der Mathematiker würde sagen: die Summe divergiert bzw. strebt gegen Unendlich.

Stellen wir uns nun vor, wir hätten ein Seil der Länge 1, würden dieses mit einem Seil der Länge 2 und das Ergebnis mit einem Seil der Länge 4 und das Ergebnis wiederum mit einem Seil der Länge 8, und so weiter verknüpfen. Offensichtlich erhielten wir auch hier ein potentiell unendlich langes Seil.

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1 = \underbrace{1}_{1} + \underbrace{1+1}_{2} + \underbrace{1+1+1+1}_{4} + \underbrace{1+1+1+1+1+1+1+1}_{8} + \ldots$$

Und somit

$$\infty = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+1+\ldots = 1+2+4+8+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i$$

Da die Grundidee des gerade geführten Beweises problemlos auf andere Zahlenfolgen übertragbar ist, können wir das zuvor erhaltene Ergebnis verallgemeinern: Die potentiell unendliche Summation der Glieder einer monoton wachsenden Folge[6] (a_n) ist stets potentiell unendlich groß. Mathematisch ausgedrückt:

Sei (a_n) eine monoton wachsende Folge, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \infty.$$

[6] Der Ausdruck (a_n) steht für die unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ Diese Folge ist monoton wachsend, wenn gilt $a_i \leq a_{i+1}$.

Divergenz der Summe der Glieder monoton fallender Folgen

Wie eigentlich nicht anders zu erwarten war, hat uns bisher die Summation keine neuen Qualitätsunterschiede offenbart, allerdings haben wir bisher auch nur konstante bzw. monoton wachsende Folgen betrachtet. Betrachten wir zur Abwechslung einmal monoton fallende Folgen:

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1}}_{\geq \frac{1}{2}}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots}_{\geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

Somit gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Und daher

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

Wir können wieder zusammenfassen: Die potentiell unendliche Summation der Glieder einiger monoton fallender Folgen ist potentiell unendlich groß.

Konvergenz der Summe der Glieder monoton fallender Folgen

Die bisherige Ausbeute ist ernüchternd: Wir haben erfahren, dass die Summation der Glieder einer konstanten oder monoton wachsenden Folge stets divergiert. Wir konnten zudem die

Existenz monoton fallender Folgen nachweisen, für die die Summation der Glieder ebenfalls divergiert. Es liegt die Vermutung nahe, dass die Summation der Glieder einer monoton fallenden Folge stets divergiert, die Summation somit keinerlei Verfeinerungen des potentiell Unendlichen liefert bzw. die Summation unendlich vieler Zahlen stets etwas Unendliches liefert. Überraschender Weise ist dem aber nicht so:

Stellen wir uns vor, wir hätten ein Seil der Länge 2*. Wir teilen dieses Seil nun in zwei gleichgroße Hälften der Länge* 1*. Anschließend teilen wir eines der beiden Seile wieder in zwei gleichgroße Teile und verknüpfen eines davon (ohne Längenverlust) mit dem anderen Seil der Länge* 1*. Wir besitzen jetzt ein Seil der Länge* 1.5 *(*$= 1 + 0.5$*) und ein Seil der Länge* 0.5*. Das Seil der Länge* 0.5 *teilen wir wieder in zwei gleichgroße Teile und verknüpfen das eine Teilstück mit dem Seil der Länge* 1.5*. Wir besitzen jetzt ein Seil der Länge* 1.75 *(*$= 1 + 0.5 + 0.25$*) und ein Seil der Länge* 0.25*. Wir denken uns nun diesen Vorgang potentiell unendlich fortgesetzt. Das Seil, das wir immer wieder teilen, ist offensichtlich potentiell unendlich kurz. Doch wie lang ist das andere Seil? Die Antwort ist einfach, wenn wir uns vergegenwärtigen, dass dieses Seil ausschließlich aus Teilen des Ausgangsseils (der Länge* 2*) besteht. Die Verknüpfung dieser Teile geschieht ohne Längenverlust (und auch ohne Längengewinn). Somit besitzt dieses Seil höchstens wieder die Länge* 2 *und nicht eine potentiell unendliche Länge.*

Ein Bogenschütze zielt mit einem Pfeil auf ein 2 *Meter entferntes Ziel und schießt den Pfeil ab. Bevor der Pfeil sein Ziel erreicht, muss er erst einmal die Hälfte der Wegstrecke zurücklegen. Von der übrig bleibenden Strecke muss er ebenfalls erst einmal die Hälfte der Distanz überwinden und so weiter. Er muss also zuerst eine Wegstrecke der Länge* 1*,* *dann der Länge* 0.5*, dann der Länge* 0.25*, und so weiter zurücklegen. Somit legt er unendlich viele Teilstrecken zurück. Aus der Erfahrung wissen wir, dass der Pfeil (bei einem gut gezielten Schuss) sein Ziel irgendwann erreichen und dabei eine Wegstrecke von 2 Meter zurückgelegt haben wird.*

Die in den beiden vorangehenden Geschichten dargestellten geometrischen Zerlegungen bzw. Zusammensetzungen lassen sich wie folgt arithmetisch deuten:

Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots = 1+0.5+0.25+0.125+0.0625+\ldots = 2.$$

Wir können wieder zusammenfassen: Die potentiell unendliche Summation der Glieder einiger monoton fallender Folgen ist nicht potentiell unendlich groß. Der Mathematiker würde sagen: Die Summe konvergiert.

Es gibt somit (mindestens) drei grundlegend verschiedene Formen der potentiellen Unendlichkeit, nämlich das potentiell unendlich Große, das divergente potentiell unendlich Kleine und das konvergente potentiell unendlich Kleine. Folglich gibt es innerhalb des potentiell Unendlichen qualitative Unterschiede, die über Groß und Klein hinausgehen!

Die konvergente potentielle Unendlichkeit zeigt, dass unendlich viele Schritte unter Umständen nur endlich viel Zeit bzw. Weg in Anspruch nehmen. Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir uns noch vor Augen führen, wie leicht es sein kann, durch Missachtung dieser Erkenntnisse, paradoxe Folgerungen zu erhalten:

Betrachten wir noch einmal den auf ein 2 *Meter entferntes Ziel abgeschossenen Pfeil. Bevor der Pfeil eine beliebige Distanz zurücklegen kann, muss er erst einmal die Hälfte der*

Distanz zurückgelegt haben und davor die Hälfte der Hälfte und so weiter. Dann kann der Pfeil aber nie losfliegen, denn bevor er den ersten Schritt tun kann, muss er bereits unendlich viele Schritte getan haben!?

Achill, der schnellste Läufer Griechenlands, fordert eine Schildkröte zu einem Wettrennen heraus. Da die Schildkröte deutlich langsamer ist als Achill, erhält sie zwei Meter Vorsprung. Es gewinnt derjenige, der als erster das 10 *Meter entfernte Ziel erreicht. Nehmen wir einmal an, Achill läuft doppelt so schnell wie die Schildkröte, dann würde er sie theoretisch nach vier Metern eingeholt haben, da die Schildkröte in derselben Zeit nur zwei Meter zurückgelegt haben kann. Wenn Achill aber den Punkt erreicht, an dem die Schildkröte gestartet ist, so ist diese bereits einen Meter weiter. Wenn Achill den* 1 *Meter entfernten Punkt erreicht, ist die Schildkröte bereits* 0.5 *Meter weiter. Allgemein gilt: Immer wenn Achill einen Punkt erreicht, an dem die Schildkröte bereits gewesen ist, ist diese bereits ein kleines Stück weiter. Somit wird Achill die Schildkröte niemals einholen und verliert den Wettlauf!?*

KAPITEL 3

Wie groß ist die Menge der natürlichen Zahlen?

Während wir uns im vorangehenden Kapitel mit der potentiellen Unendlichkeit beschäftigt haben, wollen wir uns nun der aktualen Unendlichkeit zuwenden. Grundlage der Untersuchungen zur aktualen Unendlichkeit ist die Mengenlehre:

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.[7]

Charakterisierung der natürlichen Zahlen

Die bekannteste (aktual) unendliche Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$ bzw. $\mathbb{N}_1 = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}, \mathrm{VIII}, \mathrm{IX}, \mathrm{X}, \ldots\}$. Die Peanoschen Axiome, mit deren Hilfe die natürlichen Zahlen eindeutig charakterisiert werden (können), stellen sicher, dass es *unendlich* viele natürliche Zahlen gibt:

(1) Es gibt eine natürliche Zahl 1.

(2) Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutig bestimmten Nachfolger $n+1$.

(3) Die 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(4) Sind die Nachfolger zweier natürlichen Zahlen gleich, so sind es auch die beiden natürlichen Zahlen selbst.

[7] Definition der Menge nach Georg Cantor aus [**Ca95**].

(5) Gilt eine Eigenschaft für die 1 und folgt aus der Gültigkeit für n stets auch die Gültigkeit für $n+1$, so besitzen alle natürliche Zahlen diese Eigenschaft.

Somit ist die Menge der natürlichen Zahlen unendlich, wir schreiben $||\mathbb{N}_1|| = \infty$ und sagen, $\mathbb{N}_1$ ist von unendlicher Mächtigkeit.

Dem aufmerksamen Leser wird sicherlich aufgefallen sein, dass wir die Zahl 0 vergessen haben. Wir fügen nun der Menge $\mathbb{N}_1$ die 0 hinzu und bezeichnen diese Menge mit $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_1 \cup \{0\}$.[8] Offensichtlich gilt $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0$ enthält also alle Elemente aus $\mathbb{N}_1$ und noch ein Element mehr. Daher müsste doch eigentlich $||\mathbb{N}_0|| > ||\mathbb{N}_1||$ bzw. genauer $||\mathbb{N}_0|| = ||\mathbb{N}_1|| + 1$ gelten, oder?

Mächtigkeitsvergleiche

Um diese Behauptung beweisen oder widerlegen zu können, müssen wir Mächtigkeiten unendlicher Mengen vergleichen können. Dazu müssen wir uns erst einmal vergegenwärtigen, wie wir die Mächtigkeiten endlicher Mengen vergleichen: In der Regel werden wir einfach die Elemente der einen Menge und dann die Elemente der anderen Menge mit 1 beginnend durchnummerieren, wobei wir in keiner Weise auf die Reihenfolge der Elemente zu achten brauchen. Die Mächtigkeit der Mengen ist dann jeweils die größte verwendete natürliche Zahl. Der Vergleich der Mächtigkeiten erfolgt anschließend über den Vergleich der natürlichen Zahlen.

Für unendliche Mengen gibt es nun unter anderem drei Probleme. Erstens brauchen wir Zahlen, die über die natürlichen Zahlen hinausgehen, da wir sonst die unendlich vielen Elemente aufgrund eines unzureichenden Zahlenvorrates gar nicht durchnummerieren können. Zweitens existiert nicht immer eine größte verwendete Zahl. (Durchnummerierung der natürlichen Zahlen

[8] Zur Vereinfachung schreiben wir in den folgenden Kapiteln $\mathbb{N}$ für $\mathbb{N}_1$.

in ihrer natürlichen Ordnung $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ mit den natürlichen Zahlen.) Und drittens ist die größte verwendete Zahl von der Ordnung der Elemente abhängig. (Durchnummerierung der folgenden Ordnungen der natürlichen Zahlen: $\{2, 3, 4, 5, \dots, 1\}$ oder $\{3, 4, 5, 6, \dots, 1, 2\}$.)

Die Lösung des Problems ist daher folgende: Wir dürfen nicht über den Umweg des Elementezählens gehen. Offensichtlich sind doch zwei Mengen gleichgroß, wenn sich jedem Element der einen Menge ein Element der anderen Menge in umkehrbar eindeutiger Weise zuordnen lässt und bei dieser Paarbildung keine Singles übrig bleiben.

Es war einmal ein Schäfer. Dieser hatte viele Schafe. Jeden Morgen brachte er seine Schafe auf die Weide, und jeden Abend brachte er sie wieder zurück in den Stall. Selbstverständlich muss der Schäfer am Abend sicherstellen, dass kein Schaf verloren gegangen ist bzw. er muss überprüfen, ob im Laufe des Tages Schafe, zum Beispiel durch Geburt, hinzugekommen sind. Da er niemals die Schule besucht hat, konnte er nur bis 10 zählen. Sein Vater, ebenfalls Schäfer, hatte das gleiche Problem. Er kannte aber einen Trick, den ihm wiederum sein Vater beigebracht hatte. Nach diesem Verfahren lässt der Schäfer am Morgen die Schafe einzeln die Weide betreten. Für jedes Schaf legt er einen Stein auf einen Haufen. Somit hat er am Ende genau so viele Steine angehäuft, wie er Schafe besitzt, ohne zu wissen, wie viel Schafe bzw. Steine es tatsächlich sind. Am Abend lässt er die Schafe nur einzeln die Weide wieder verlassen. Dabei nimmt er für jedes Schaf einen Stein vom Haufen. Bleiben Steine übrig, so sind am Tage Schafe verloren gegangen. Bleiben Schafe übrig, so sind Schafe hinzugekommen. Bleiben weder Schafe noch Steine übrig, so verlassen am Abend genau so viele Schafe die Weide wie sie am Morgen betreten haben.

Dieses Verfahren funktioniert glücklicherweise in eingeschränkter[9] Form auch bei unendlichen Mengen: Es seien A und B zwei Mengen. Es gilt $||A|| \leq ||B||$ genau dann, wenn es eine Paarbildung der Elemente aus A mit den Elementen aus B gibt, so dass jedem Element aus A ein Partner aus B zugeordnet werden kann. In der Menge B dürfen dabei Singles übrig bleiben. Es gilt $||A|| = ||B||$ genau dann, wenn $||A|| \leq ||B||$ und $||A|| \geq ||B||$ bzw. wenn es eine vollständige Paarbildung (= Paarbildung ohne Übrigbleiben von Singles) zwischen A und B gibt. Es gilt $||A|| < ||B||$ genau dann, wenn $||A|| \leq ||B||$ und $||A|| \neq ||B||$ bzw. wenn bei jeder Paarbildung zwischen den Elementen von A und B Singles in der Menge B übrig bleiben.[10]

Beweis der Gleichmächtigkeit

Mit Hilfe der vorangehenden Definitionen sind wir nun in der Lage die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}_1$ und $\mathbb{N}_0$ zu beweisen:

(1)

$\mathbb{N}_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\mathbb{N}_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

(2) Wir bilden die Paare $(n, n-1)$, ordnen also jedem Element n der Menge $\mathbb{N}_1$ seinen Vorgänger aus der Menge $\mathbb{N}_0$ bzw. jedem Element $n-1$ der Menge $\mathbb{N}_0$ seinen Nachfolger aus der Menge $\mathbb{N}_1$ zu.

[9] Aus dem Übrigbleiben von Singles kann bei unendlichen Mengen nicht auf die Ungleichmächtigkeit geschlossen werden, da es ja eine andere, erfolgreichere Paarbildungsvorschrift geben könnte.

[10] Wir haben hier die Gleichmächtigkeit sowohl über die Relation $\leq$, als auch über die vollständige Paarbildung definiert. Die Gleichwertigkeit beider Definitionen bedarf noch eines Beweises. Wir verzichten an dieser Stelle auf diesen Beweis und verweisen auf den *Äquivalenzsatz* von Dedekind, Bernstein oder Schröder. Wir verzichten auch auf den Beweis, dass für $\leq$ alle Gesetzmäßigkeiten üblicher Größenrelationen (Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität, Totalität/Vergleichbarkeit) gelten. Bezüglich der Totalität bzw. Vergleichbarkeit sei auf den *Vergleichbarkeitssatz* von Zermelo verwiesen.

Beide Varianten beschreiben die gleiche vollständige Paarbildung und zeigen, dass $\mathbb{N}_1$ gleichviel Elemente enthält wie $\mathbb{N}_0$. Somit sind $\mathbb{N}_1$ und $\mathbb{N}_0$ gleichmächtig. Die zuvor genannte Behauptung $||\mathbb{N}_0|| = ||\mathbb{N}_1|| + 1$ ist falsch und wäre nur korrekt, wenn es sich um endliche Mengen handeln würde. Die beiden Mengen sind aber unendlich und für unendliche Mengen gelten, wie nicht anders zu erwarten war, andere Gesetzmäßigkeiten als für endliche Mengen. Die Tatsache, dass eine unendliche Menge im Gegensatz zu endlichen Mengen, gleichmächtig zu einer echten Teilmenge sein kann, ist eine charakteristische Eigenschaft unendlicher Mengen und wird daher in der Mathematik zur Unterscheidung der unendlichen Mengen von den endlichen Mengen verwendet.

Es war einmal ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern. Jedes Zimmer hatte eine natürliche Zahl als Zimmernummer. Eines Abends, es war Hochsaison und somit alle Zimmer belegt, kam ein Wanderer des Weges und suchte eine Unterkunft für die Nacht. Der Wanderer wurde sofort mit der Begründung abgewiesen, dass alle Zimmer belegt seien. Nun war der Wanderer aber Mathematiker und kannte unter anderem den Inhalt dieses Kapitels. Daher kam ihm eine Idee: Es sollten alle Gäste in das Zimmer mit der nächsthöheren Nummer umziehen. Dadurch würde jeder Gast auch weiterhin ein eigenes Zimmer haben und es wäre nun das Zimmer mit der Nummer 1 *frei. Gesagt, getan. Die Gäste zogen um und der Wanderer bekam das Zimmer mit der Nummer* 1.

Zusammenfassung und Ergänzungen

Die Konsequenzen aus der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}_1$ und $\mathbb{N}_0$ lassen sich wie folgt zusammenfassen:

(1) Wird einer unendlichen Menge M ein neues Element hinzugefügt, so ändert sich die Mächtigkeit nicht. (Übergang von $\mathbb{N}_1$ zu $\mathbb{N}_0$.)

(2) Wird aus einer unendlichen Menge M ein Element entfernt, so ändert sich die Mächtigkeit nicht. (Übergang von $\mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{N}_1$.)

(3) Werden einer unendlichen Menge M n neue Element hinzugefügt (mit $n \in \mathbb{N}_1$), so ändert sich die Mächtigkeit nicht. (Übergang von $\mathbb{N}_1$ zu $\mathbb{N}_0$. Transformation von $\mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{N}_1$ durch Umbenennung der Elemente in $\mathbb{N}_0$ gemäß der gerade gefundenen Paarbildung. Übergang von $\mathbb{N}_1$ zu $\mathbb{N}_0$. ...)

(4) Werden einer unendlichen Menge M n Element entnommen (mit $n \in \mathbb{N}_1$), so ändert sich die Mächtigkeit nicht. (...)

Kleinkinder haben übrigens weniger Problem mit der Unendlichkeit als wir Erwachsenen, wie folgende Beispiele der Kleinkindmathematik zeigen:

(1) Kleinkinder gehen noch nicht in die Schule. Daher sind sie auch nicht in der Lage komplizierte Berechnungen durchzuführen. Selbst des Zählens sind sie nur begrenzt fähig. Zum Zählen verwenden sie ihre Finger. Sie stellen somit eine Verbindung (Paarbildung) zwischen den zu zählenden Objekten und ihren Fingern her.

(2) Die Mathematik der Zahlen zwischen 0 und 10 entspricht unserer bekannten Schulmathematik. Gleiches gilt für die Mächtigkeit von Mengen mit 0 bis 10 Elementen.

(3) Für Mengen mit der Mächtigkeit > 10 gilt: $||M|| = \mathit{viele}$.

(4) Fügt man ein Element hinzu gilt: $||M \cup \{x\}|| = \mathit{viele}$ und somit $\mathit{viele} + 1 = \mathit{viele}$.

(5) Außerdem gilt $\mathit{viele} + \mathit{viele} = \mathit{viele}$, eine mit Blick auf das nächste Kapitel bemerkenswerte Erkenntnis.

KAPITEL 4

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Im vorangehenden Kapitel haben wir erfahren, dass einer unendlichen Menge endlich viele Elemente hinzugefügt oder aus ihr entfernt werden können, ohne dass sich durch diese Aktivität die Mächtigkeit ändert. Doch wie verhält es sich beim Hinzufügen bzw. Entfernen von unendlich vielen Elementen? Um diese Frage zu klären, betrachten wir die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}.$$

$\mathbb{Z}$ enthält „doppelt" so viele Elemente wie $\mathbb{N}$, nämlich einmal die natürlichen Zahlen (inklusive der Null) und dann noch einmal die natürlichen Zahlen (ohne die Null) mit einem negativen Vorzeichen.

Beweis der Gleichmächtigkeit

Überraschenderweise lässt sich auch hier die Gleichmächtigkeit beweisen:

(1)

$\mathbb{N}_0$	...	7	5	3	1	0	2	4	6	8	...
$\mathbb{Z}$	...	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	...

(2)

$\mathbb{N}_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\mathbb{Z}$	0	−1	+1	−2	+2	−3	+3	−4	+4	−5	...

(3) Wir bilden die Paare $(\phi(z), z)$ mit

$$\phi(z) = \begin{cases} 2 * |z| - 1 & \text{falls } z < 0 \\ 2 * |z| & \text{falls } z \geq 0 \end{cases}$$

In Variante 1 haben wir die natürlichen Zahlen (inkl. 0) in die für die ganzen Zahlen übliche Ordnung gebracht und damit eine vollständige Paarbildung gefunden. In Variante 2 haben wir die ganzen Zahlen in die für die natürlichen Zahlen übliche Ordnung überführt und in Variante 3 haben wir die vollständige Paarbildung mittels einer Transformationsvorschrift für die Transformation von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}_0$ angegeben. Wir haben damit $||\mathbb{Z}|| = ||\mathbb{N}_0||$ bewiesen. Wegen $||\mathbb{N}_0|| = ||\mathbb{N}_1||$ (siehe voriges Kapitel) gilt auch $||\mathbb{Z}|| = ||\mathbb{N}_1||$.

Diese 3 Varianten stellen die drei üblichen Methoden zum Beweis der Gleichmächtigkeit einer beliebigen Menge M mit der Menge der natürlichen Zahlen dar:

(1) Man bringe die natürlichen Zahlen in die übliche Ordnung der Elemente der Menge M.

(2) Man bringe die Elemente der Menge M in die übliche Ordnung der natürlichen Zahlen.

(3) Man gebe eine Transformationsvorschrift von $\mathbb{N}_1$ nach M (oder umgekehrt) an.

Es gibt noch eine vierte Variante, die wir hier (noch) nicht angewendet haben:

(4) Man verfahre analog zu Methode (1), (2) oder (3), verwende dabei aber statt $\mathbb{N}_1$ eine Menge, für die die Gleichmächtigkeit mit $\mathbb{N}_1$ bereits bewiesen wurde.

Das Hotel mit den unendlich vielen Zimmern erlangte, dank der im vorangehenden Kapitel geschilderten Begebenheit, eine solche Berühmtheit, dass es ab diesem Zeitpunkt stets ausgebucht war. Dennoch können kleinere (endliche) Reisegruppen problemlos untergebracht werden. Nun reiste eines Tages ein Reisebus mit unendlich vielen Hotelgästen an.

Der Hotelbesitzer war im ersten Moment ratlos, funktionierte doch das bisher angewendete Verfahren nicht mehr. Zum Glück hatte er sich mittlerweile über die Besonderheiten unendlicher Mengen informiert und kannte eine Lösung: Ein Gast des Zimmers n sollte demnach in das Zimmer $2 * n$ umziehen. Dadurch würden die bisherigen Gäste ausschließlich Zimmer mit geraden Zimmernummern belegen und die unendlich vielen ungeraden Zimmer wären für die neuen Gäste frei.

Abzählbarkeit

Variante (2) ist unter einem weiteren Aspekt besonders interessant. Neben der Findung einer vollständigen Paarbildung der Elemente aus M mit den Elementen aus $\mathbb{N}_1$, liefert sie uns ein potentiell unendliches Verfahren zur Abzählung aller Elemente aus M, also ein Verfahren in dessen Verlauf alle Elemente aus M aufgezählt/abgezählt werden und kein einziges Element vergessen wird. Mengen für die ein solches Abzählungsverfahren existiert, nennt der Mathematiker *abzählbar*.

Es war einmal ein alter Mann. Dieser hatte den Mathematikunterricht in seiner Schulzeit stark vernachlässigt und stets sehr schlechte Noten erhalten. Aus diesem und anderen Gründen kam er nach seinem Tode in die Hölle. Der Teufel, dem die schlechten mathematischen Leistungen bekannt waren, gab ihm eine letzte „Chance“. Er schrieb auf einen Zettel eine beliebige ganze Zahl. Der Mann durfte jeden Tag genau eine Zahl raten. Würde er die notierte Zahl erraten, wäre er frei und käme in den Himmel, ansonsten müsste er bis in alle Ewigkeit im Fegefeuer schmoren. Der Mann nimmt sich nun vor, zuerst die positiven ganzen Zahlen und anschließend (er hat ja genug Zeit!?) die negativen ganzen Zahlen aufzuzählen. ... Auf dem Zettel war übrigens *eine negative Zahl notiert. Hätte er doch nur dieses Kapitel gelesen.*

Zusammenfassung und Ergänzungen

Aus der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}_1$ und $\mathbb{Z}$ lassen sich auch hier wieder interessante Konsequenzen ableiten:

(1) Werden einer unendlichen Menge M unendlich viele neues Element hinzugefügt, so ändert sich die Mächtigkeit nicht. (Übergang von $\mathbb{N}_1$ zu $\mathbb{Z}$.)

(2) Werden aus einer unendlichen Menge M unendlich viele Element entfernt, so ändert sich die Mächtigkeit unter Umständen nicht. (Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{N}_1$.) Die Mächtigkeit kann sich aber bei günstiger Wahl der zu entfernenden Elemente ändern. (Entfernen aller natürlichen Zahlen ≥ 7 aus der Menge der natürlichen Zahlen.)

(3) Werden einer unendlichen Menge M n mal unendlich viele Elemente hinzugefügt (mit $n \in \mathbb{N}_1$), so ändert sich die Mächtigkeit nicht. (Übergang von $\mathbb{N}_1$ zu $\mathbb{Z}$. Transformation von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{N}_1$ durch Umbenennung der Elemente in $\mathbb{Z}$ gemäß der vorhin gefundenen Paarbildung. Übergang von $\mathbb{N}_1$ zu $\mathbb{Z}$. ...)

(4) ...

Diese Resultate hätten wir übrigens auch mit anderen Mengen beweisen können. So hätten wir zum Beispiel die Mengen $\mathbb{N}_1$ in die Menge der geraden natürlichen Zahlen $\mathbb{G}$ und die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen $\mathbb{U}$ zerlegen können. Wir hätten sie auch in die Menge der Quadratzahlen $\mathbb{Q} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_1\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$ und die Menge der Nichtquadratzahlen $\mathbb{N}_1 \setminus \mathbb{Q}$ zerlegen können.

Die Zerlegung der natürlichen Zahlen in Quadratzahlen und Nichtquadratzahlen ist übrigens die Grundlage der Galilei-Paradoxie: *Nicht jede natürliche Zahl ist eine Quadratzahl. Somit gibt es weniger Quadratzahlen als natürliche Zahlen, es gilt* $||\mathbb{Q}|| < ||\mathbb{N}_1||$. *Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist eine umkehrbar eindeutig bestimmte Quadratzahl. Somit gibt es mindestens so viele Quadratzahlen wie natürliche Zahlen, es gilt* $||\mathbb{Q}|| \geq ||\mathbb{N}_1||$. *Es gilt also* $||\mathbb{Q}|| < ||\mathbb{N}_1||$ *und gleichzeitig* $||\mathbb{Q}|| \geq ||\mathbb{N}_1||$. *Widerspruch. Wir folgern daraus, dass sich Mächtigkeiten unendlicher Mengen nicht sinnvoll vergleichen lassen!?*[11]

[11] Dieser Argumentation enthält einen gravierenden Fehler: Seien A und B zwei unendliche Mengen, dann folgt aus $A \subset B$, im Gegensatz zu endlichen Mengen, nicht unbedingt $||A|| < ||B||$.

KAPITEL 5

Wie viele rationale Zahlen gibt es?

Wir wissen nun, dass sich die Mächtigkeit einer Menge nicht ändert, wenn ihr unendlich viele Elemente hinzugefügt werden. Dieser Vorgang des Hinzufügens kann sogar beliebig oft wiederholt werden. Doch was passiert, wenn wir unendlich oft unendlich viele Elemente hinzufügen?

Zur Untersuchung dieses Sachverhaltes bilden wir die Menge aller Paare von natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ und zerlegen diese Menge in unendlich viele unendliche Mengen $M_i = \{(i, b) : b \in \mathbb{N}\}$ mit $i \in \mathbb{N}$. Die Mengen M_i enthalten alle Paarungen der natürlichen Zahl i mit einer beliebigen natürlichen Zahl. Wegen $\mathbb{N}^2 = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots$ entsteht $\mathbb{N}^2$ durch unendlich oftes Hinzufügen unendlich vieler Elemente zur unendlichen Menge M_1. Ersetzen wir nun das Element (a, b) durch den Bruch a/b und entfernen alle kürzbaren bzw. ungültigen Brüche, so erhalten wir die Menge aller positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_+$. Die Mengen M_i bleiben trotz Entfernung einiger Brüche unendlich. Somit enthält $\mathbb{Q}_+$ analog zu $\mathbb{N}^2$ unendlich mal unendlich viele Elemente. Die Frage nach der Mächtigkeit einer Menge bestehend aus unendlich mal unendlich vielen Elementen reduziert sich damit auf die Fragen nach der Mächtigkeit von $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{N}^2$ bzw. $\mathbb{Z}^2$.

Beweis der Abzählbarkeit / Gleichmächtigkeit

Die Menge $\mathbb{Q}_+$ enthält unendlich mal mehr Elemente als die Menge $\mathbb{N}$, was man unter anderem daran erkennt, dass sich auf einem Zahlenstrahl zwischen zwei benachbarten natürlichen

Zahlen noch unendlich viele rationale Zahlen befinden. Ja sogar zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen liegen noch unendlich viele rationale Zahlen. Und dennoch: Auch $\mathbb{Q}_+$ ist eine abzählbar unendliche Menge, es gilt also $||\mathbb{Q}_+|| = ||\mathbb{N}_1||$:

(1+2) Man denke sich ein zweidimensionales Koordinatensystem mit einem Koordinatenursprung und zwei nach oben und unten bzw. links und rechts unendlich ausgedehnten Koordinatenachsen. Jeder Punkt in diesem Koordinatensystem wird eindeutig durch zwei Koordinaten aus $\mathbb{R}$ (= Menge der reellen Zahlen) bzw. einem Tupel aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (= Menge der geordneten Paare reeller Zahlen) beschrieben. Für uns interessant sind dabei lediglich die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Entsprechend dem in Abbildung 1 auf Seite 46 dargestellten Verfahren lassen sich alle diese unendlich mal unendlich vielen Punkte abzählen. Wir ersetzen nun die Punkte durch ihre jeweiligen Koordinaten, also durch Tupel aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (= Menge der geordneten Paare ganzer Zahlen) und erkennen, dass nach dem durch die Pfeile beschriebenen Verfahren zuerst alle Tupel mit dem Maximum 0, dann alle Tupel mit dem Maximum 1, dann alle Tupel mit dem Maximum 2, usw. abgezählt werden. Wir beschränken uns auf den ersten Quadranten indem wir aus der Abzählung alle Tupel mit $a \leq 0$ oder $b \leq 0$ entfernen. Anschließend ersetzen wir die Tupel (a, b) durch Brüche a/b und entfernen alle kürzbaren bzw. ungültigen Brüche. (Die Zahl $2/2$ wird zum Beispiel bereits als $1/1$ aufgezählt.) Das Ergebnis ist offensichtlich eine Abzählung von $\mathbb{Q}_+$.

(3) Die durch die Abzählung gefundene vollständige Paarbildung kann auch mit einer mathematischen Formel beschrieben werden. Diese Formel ist allerdings etwas

kompliziert, so dass wir an dieser Stelle eine alternative Paarbildung beschreiben wollen: Sei a/b eine positive rationale Zahl, dann sind a und b zwei natürliche Zahlen und lassen sich als Dezimalzahlen $a = a_m \dots a_2 a_1 a_0$ bzw. $b = b_m \dots b_2 b_1 b_0$ mit $a_i, b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ schreiben. Falls eine Zahl weniger Dezimalstellen als die andere besitzt, so werde diese mit führenden Nullen aufgefüllt. Sei nun $\phi(a/b) = a_m b_m \dots a_2 b_2 a_1 b_1 a_0 b_0$ der fairer Shuffel von a und b, dann beschreibt $(\phi(q), q)$ eine vollständige Paarbildung der Elemente aus $\mathbb{Q}_+$ mit den Elementen aus $\mathbb{N}_1$.[12]

Aufgrund des Erfolges des Hotels mit den unendlich vielen Zimmern, wurden unendlich viele Hotels mit unendlich vielen Zimmern gebaut. Alle diese Hotels waren stets komplett belegt. Nun begab es sich, dass alle Hotels, bis auf eines, wegen Modernisierungsmaßnahmen zeitweilig geschlossen werden mussten. Alle Gäste der unendlich vielen Hotels sollten nun in das eine noch verbliebene Hotel umziehen. Dazu wurde die Zimmernummerierung gemäß der oben beschriebenen Paarbildung geändert. Jedes Zimmer besaß nun eine aus zwei natürlichen Zahlen bestehende Zimmernummer. Der Gast aus Zimmer n des Hotels m zog nun in das Zimmer mit der Nummer (n, m) um.

[12] Ein Paar ist zum Beispiel $(10304171, 1347/11)$.

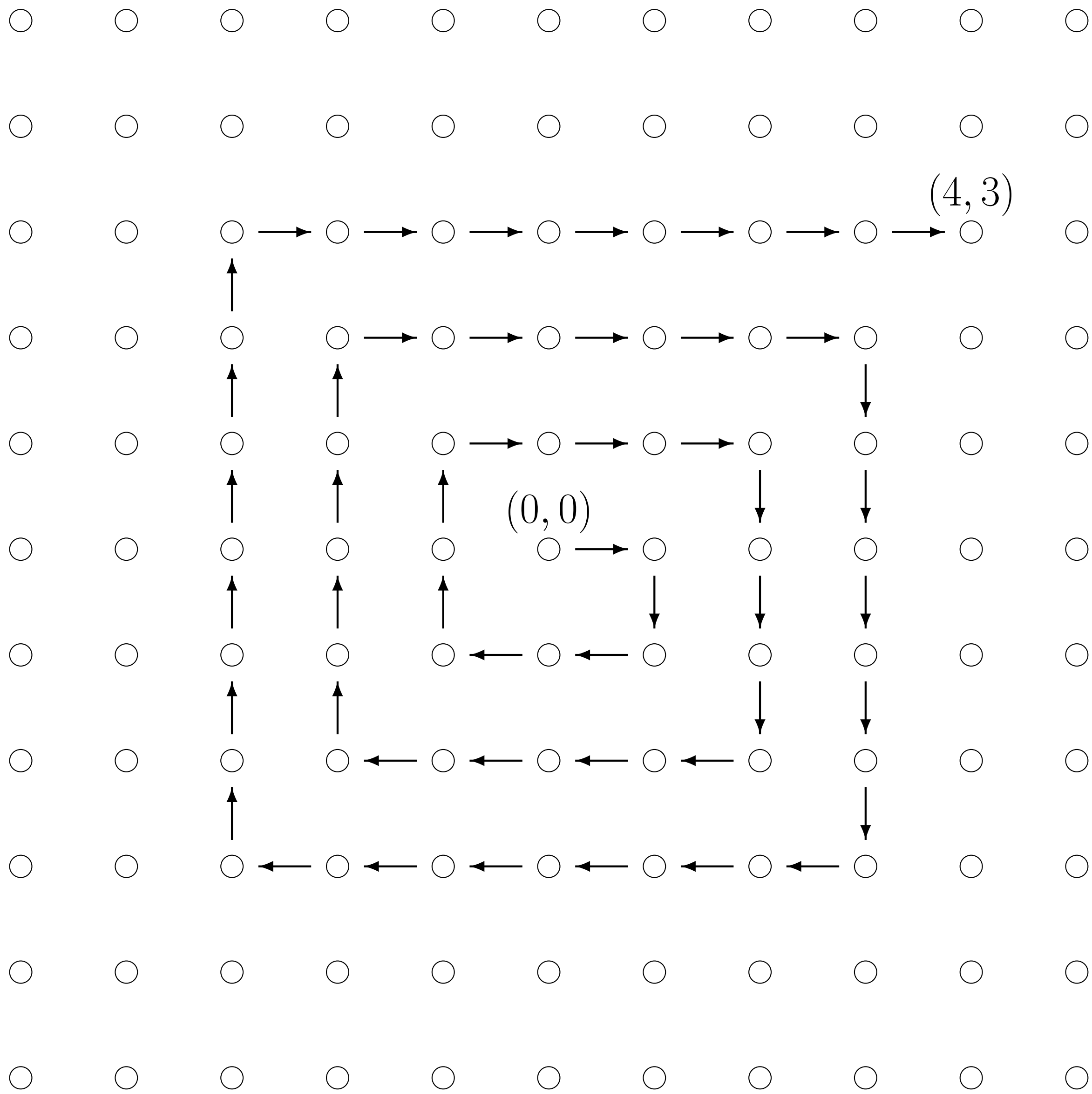

Abbildung 1. Abzählung von unendlich mal unendlich vielen Punkten.

KAPITEL 6

Wie viele Zahlen kann man aufschreiben?

Aufgrund des vorangehenden Kapitels wissen wir nun auch, dass die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ abzählbar bzw. von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen ist. Das gleiche gilt wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ bzw. $||\mathbb{N}|| = ||\mathbb{Z}||$ auch für $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$.

Wir wissen aber noch mehr: Nicht nur alle Paare von natürlichen Zahlen sind abzählbar, sondern auch alle Tripel. Denn Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen sind fast das gleiche wie die Paarung von natürlichen Zahlen mit Paaren von natürlichen Zahlen: $(a, (b, c))$. Es gilt: $||\mathbb{N}^3|| = ||\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}|| = ||\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})||$. Wegen $||\mathbb{N} \times \mathbb{N}|| = ||\mathbb{N}||$ kann $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ durch $\mathbb{N}$ ersetzt werden und es gilt: $||\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})|| = ||\mathbb{N} \times \mathbb{N}|| = ||\mathbb{N}^2||$. Das ganze lässt sich beliebig oft wiederholen. Es gilt somit $||\mathbb{N}|| = ||\mathbb{N}^2|| = ||\mathbb{N}^3|| = ||\mathbb{N}^4|| = ||\mathbb{N}^5|| = \ldots$. Diese Mengen enthalten bereits unendlich mal unendlich … mal unendlich viele Elemente. Es gibt aber noch größere Mengen:

Betrachten wir dazu einmal die deutsche Sprache. Sie besteht aus unendlich(?) vielen, endlichen Wörtern über dem endlichen Alphabet $X = \{\text{A}, \ldots, \text{Z}, \text{Ä}, \text{Ö}, \text{Ü}, \text{a}, \ldots, \text{z}, \text{ä}, \text{ö}, \text{ü}, \text{ß}\}$. Die ägyptischen Hieroglyphen, die russische oder die chinesische Sprache bestehen ebenfalls aus einer Menge von endlichen Wörtern, allerdings auf der Grundlage anderer (endlicher) Alphabete. Wollten wir alle existierenden bzw. möglichen Sprachen zu einer universellen Sprache verschmelzen, ginge dies am einfachsten mit einem unendlichen Alphabet, zum Beispiel der Menge der natürlichen Zahlen. Wörter der universellen Sprache wären dann endliche Folgen natürlicher Zahlen:

$$\mathbb{U} = \{n_1.n_2.n_3 \ldots n_{k-1}.n_k : k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N} \text{ für alle } 1 \leq i \leq k\}$$

Offensichtlich gilt: $\mathbb{U} = \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^1 \cup \mathbb{N}^2 \cup \mathbb{N}^3 \cup \mathbb{N}^4 \cup \ldots$ und somit $\mathbb{N}^k \subset \mathbb{U}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.[13]

Beweis der Abzählbarkeit der universellen Sprache

Die universelle Sprache ist somit „größer“ als jede bisher betrachtete Menge. Aber ist sie auch mächtiger? Die Antwort lautet *Nein*! Der Beweis erfolgt ähnlich dem Beweis im vorangehenden Kapitel, statt dem Maximum verwenden wir hier aber die Summe: Wir gruppieren die Wörter der universellen Sprache nach der Summe ihrer Elemente. So besitzt zum Beispiel das Wort 1.9.7.9 die Summe $1 + 9 + 7 + 9 = 26$. Die Summe ist für jedes Wort eine eindeutig bestimmte (charakteristische) natürliche Zahl. Damit lässt sich jedes Wort einer eindeutig bestimmten natürlichen Zahl zuordnen. Bei genauerer Betrachtung stellen wir nun fest, dass jeder natürlichen Zahl nur endlich viele Wörter zugeordnet werden können, da für die Summe k nur Wörter der Maximallänge k mit Buchstaben aus dem Bereich 1 bis k in Frage kommen und es somit insgesamt

[13] Die Menge $\mathbb{N}^*$ (Menge der endlichen Wörter über dem Alphabet $\mathbb{N}$) darf auf keinen Fall mit der Menge $\mathbb{N}^\infty = \{n_1.n_2.n_3.\ldots : n_i \in \mathbb{N}\}$ (Menge der unendlichen Wörter über dem Alphabet $\mathbb{N}$) verwechselt werden!

nur 2^k Wörter der Summe k geben kann.[14] Dann lassen sich aber aller Wörter der universellen Sprache über die Summe abzählen: 1, 2, 1.1, 3, 2.1, 1.2, 1.1.1, 4, 3.1, 2.2, 1.3, 2.1.1, 1.2.1, 1.1.2, 1.1.1.1, 5, 4.1, 3.2, 2.3, 1.4, 3.1.1, 2.2.1, 2.1.2, 1.3.1, 1.2.2, 1.1.3, 2.1.1.1, 1.2.1.1, 1.1.2.1, 1.1.1.2, 1.1.1.1.1, 6, 5.1, 4.2, 3.3, 2.4, 1.5, 4.1.1, 3.2.1, 3.1.2, 2.3.1, 2.2.2, 2.1.3, 1.4.1, 1.3.2, 1.2.3, 1.1.4, 3.1.1.1, 2.2.1.1, 2.1.2.1, 2.1.1.2, 1.3.1.1, 1.2.2.1, 1.2.1.2, 1.1.3.1, 1.1.2.2, 1.1.1.3, 2.1.1.1.1, 1.2.1.1.1, 1.1.2.1.1, 1.1.1.2.1, 1.1.1.1.2, 1.1.1.1.1.1, 7, ...

Beweis der Abzählbarkeit alles Aufschreibbaren

Die Menge $\mathbb{N}^*$ ist dabei keinesfalls die größte abzählbare Menge. Wegen $||\mathbb{N}^*|| = ||\mathbb{N}||$ ist nämlich auch $(\mathbb{N}^*)^*$ abzählbar. Mann kann sogar zeigen, dass auch die Menge

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* \cup (\mathbb{N}^*)^* \cup \left((\mathbb{N}^*)^*\right)^* \cup \left(\left((\mathbb{N}^*)^*\right)^*\right)^* \cup \left(\left(\left((\mathbb{N}^*)^*\right)^*\right)^*\right)^* \cup \dots$$

abzählbar ist.

Der Beweis ist überraschend einfach: Die Abzählbarkeit der gerade genannten Menge (und übrigens auch aller bisher untersuchten Mengen) lässt sich sehr einfach über die Abzählbarkeit von Sprachen zeigen.

Natürliche Zahlen lassen sich als endliche Wörter über dem Alphabet $\{0, \dots, 9\}$ darstellen [„4711“]. Somit gibt es mindestens so viele Wörter über diesem Alphabet, wie natürliche Zahlen. Zur Darstellung der ganzen Zahlen benötigen wir lediglich das zusätzliche Symbol „−“ [„−4711“] und zur Darstellung rationaler Zahlen benötigen wir zusätzlich einen Bruchstrich, also z.B. das Symbol „/“ [„−47/11“]. Für die universelle Sprache benötigen wir ein beliebiges Trennzeichen, zum Beispiel den Punkt „.“ [„47.1.1“]. Für die Darstellung der Menge für die wir diesen

[14] Zum Beispiel besitzt nur das Wort 1 die Summe 1. Die Wörter 2 und 1.1 sind dagegen die einzigen mit der Summe 2.

Beweis eigentlich führen wollten, benötigen wir die zwei Klammersymbole „(“ und „)“ [„((47)).((11.4).(711))“][15]. Zur Darstellung der Elemente aller dieser Mengen benötigen wir also eine Sprache auf der Grundlage eines Alphabetes mit 15 Buchstaben (ohne Berücksichtigung möglicher Optimierungen).

Mittels 0-1-Blockkodierung ist eine Reduktion auf 2 Buchstaben möglich. Dazu ersetzen wir die 15 Symbole durch gleichlange, aber verschiedene Wörter über dem Alphabet $\{0,1\}$ [$0 \rightarrow 0000, 1 \rightarrow 0001, \ldots,) \rightarrow 1110$]. Die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet $\{0,1\}$ lässt sich nun quasilexikografisch abzählen. Dazu zählen wir zuerst alle Wörter der Länge eins, dann der Länge zwei, dann der Länge drei, ... ab. Da es zu jeder Länge nur endlich viele Wörter gibt und jedes Element der hier behandelten Mengen (mindestens) eine Darstellung als Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$ besitzt, sind diese Mengen zwangsläufig (nach dem Huckepackprinzip) ebenfalls abzählbar.[16]

Es stellt sich die Vermutung ein, dass alle Mengen abzählbar bzw. von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen sind. Ob sich diese Vermutung bestätigen lässt, oder der Schein trügt, werden wir erst in Kapitel 11 klären.

Der Mensch erschloss mittlerweile viele neue Welten und drang in neue bis dahin unbekannte Raum-Zeit-Dimensionen vor. An diesen unendlich mal unendlich mal unendlich mal unendlich mal ... Orten baute er natürlich ebenfalls unendlich viele Hotels mit unendlich vielen Betten. Um die unendlich hohen Baukosten und die Bauzeit möglichst gering zu halten, wurden jedoch billigere Materialien verwendet.

[15] Es gilt $((47)).((11.4).(711)) \in (\mathbb{N}^*)^*$

[16] Wir hätten statt der quasilexikographischen Abzählung auch wieder die Abzählung über die Summe nehmen können.

Und nun kam was kommen musste: Während der Hochsaison (sämtliche Hotels waren belegt) wurde ein Konstruktionsfehler festgestellt, der eine sofortige Schließung sämtlicher Hotels (bis auf das Original) notwendig machte. Zum Glück konnten alle Gäste in dem einen übrig gebliebenen Hotel untergebracht werden.

KAPITEL 7

Was ist das Kontinuum?

Wenden wir uns nun der kontinuierlichen Unendlichkeit zu: Die bisherigen Untersuchungen zählen zum Gebiet der Mengenlehre, diskreten Mathematik und Arithmetik. Die Geometrie, in der Geraden, Ebenen und Räume untersucht werden, ist ein davon komplett unabhängiger Teilbereich der Mathematik. Um Beziehungen zwischen dem diskreten Unendlich und dem kontinuierlichen Unendlich herstellen zu können, müssen wir zuvor eine Beziehung zwischen der Geometrie und der Arithmetik schaffen.

Arithmetische Geometrie

Die Menge der Punkte einer beidseitig unendlich ausgedehnten Geraden bezeichnen wir als geometrisches Kontinuum. Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bezeichnen wir als arithmetisches Kontinuum. Die Verbindung zwischen der Arithmetik und der Geometrie zur arithmetischen Geometrie erfolgt durch folgendes Postulat: *Jedem Punkt des geometrischen Kontinuums lässt sich in umkehrbar eindeutiger Weise eine reelle Zahl des arithmetischen Kontinuums ordnungserhaltend zuordnen.*

Dieses Postulat stellt folgende Forderungen an die postulierte Zuordnung:

(1) Zu jedem Punkt einer unendlich ausgedehnten Gerade gehört eine eindeutig bestimmte reelle Zahl. (Die Zuordnung ist eine Abbildung.)

(2) Jeder reellen Zahl wird höchstens ein Punkt zugeordnet. (Die Abbildung ist injektiv.)

(3) Jeder reellen Zahl wird mindestens ein Punkt zugeordnet. (Die Abbildung ist surjektiv.)

(4) Befindet sich ein Punkt S links von einem Punkt T, und sind s und t die zugeordneten reellen Zahlen, so ist s kleiner als t. Es gilt die Umkehrung. (Die Abbildung ist ordnungserhaltend.)

Unwillkürlichkeit der Verbindung zwischen Geometrie und Arithmetik

Dieses Postulat, das eine Verbindung zwischen Punktmengen und Zahlmengen ermöglich, ist aufgrund der Unabhängigkeit der Arithmetik von der Geometrie nicht beweisbar. Es ist allerdings auch nicht willkürlich, da das arithmetische Kontinuum die gleichen bzw. äquivalenten Eigenschaften, wie das geometrische Kontinuum besitzen muss:

(1) Offensichtlich hätten wir die natürlichen Zahlen für diese Zuordnung nicht verwenden können, da es eine kleinste natürliche Zahl gibt. Es gibt aber keinen „kleinsten“ Punkt. Ein entsprechendes Postulat würde also widersprüchliche Folgerungen nach sich ziehen.

(2) Die ganzen Zahlen hätten wir auch nicht nehmen können, da es zwischen den Zahlen 1 und 2 keine weiteren Zahlen gibt. Zwischen zwei beliebigen Punkten gibt es aber unendlich viele weitere Punkte.

(3) Die rationalen Zahlen erfüllen scheinbar alle Bedingungen im eindimensionalen Raum, aber gilt das auch für den zweidimensionalen Raum?

Betrachten wir dazu ein Quadrat der Kantenlänge 1. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Diagonale

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

mit a und b als Kantenlängen (hier $a = b = 1$) und c als Länge der Diagonalen. Somit gilt für die Länge der Diagonale

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Angenommen die rationalen Zahlen würden als arithmetische Kontinuum ausreichen, dann müsste $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sein.

Angenommen $\sqrt{2}$ ist rational. Da jede positive rationale Zahl (> 0) als Bruch zweier natürlicher Zahlen darstellbar ist, gilt für gewisse $a, b \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien a und b teilerfremd, der Bruch also nicht kürzbar.

Für jede natürliche Zahl existiert eine eindeutig bestimmte Primzahlzerlegung[17], somit auch für a und b. Es gilt

$$\sqrt{2} = \frac{a_1 * a_2 * \ldots * a_k}{b_1 * b_2 * \ldots * b_m}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Primzahlen der Größe nach geordnet mit a_1 bzw. b_1 als kleinste und a_k bzw. b_m als größte Primzahlen.

Wir können die Gleichung nun quadrieren

$$2 = \frac{a_1^2 * a_2^2 * \ldots * a_k^2}{b_1^2 * b_2^2 * \ldots * b_m^2} = \frac{a_1 * a_1 * a_2 * a_2 * \ldots * a_k * a_k}{b_1 * b_1 * b_2 * b_2 * \ldots * b_m * b_m}$$

Anschließend multiplizieren wir die gesamte Gleichung mit

$$b_1 * b_1 * b_2 * b_2 * \ldots * b_m * b_m$$

Es gilt somit

$$2 * b_1 * b_1 * b_2 * b_2 * \ldots = a_1 * a_1 * a_2 * a_2 * \ldots$$

Ein Faktor des linken Produktes ist eine 2, die linke Seite ist also gerade. Somit muss auch die rechte Seite

[17] Eine Primzahl p ist eine natürliche Zahl, die nicht als Produkt zweier natürlicher Zahlen ungleich 1 und p darstellbar ist bzw. die nur durch 1 und p ganzzahlig geteilt werden kann. Zum Beispiel gilt $12 = 2 * 2 * 3$.

gerade sein, d.h. ein Faktor der rechten Seite muss eine 2 sein. Da die Faktoren nach der Größe geordnet sind, gilt $a_1 = 2$.

Nach Kürzung der 2 erhalten wir:

$$b_1 * b_1 * b_2 * b_2 * \ldots = 2 * a_2 * a_2 * \ldots$$

Ein Faktor des rechten Produktes ist eine 2, die rechte Seite ist also gerade. Somit muss auch die linke Seite gerade sein, d.h. ein Faktor der linken Seite muss eine 2 sein. Da die Faktoren der Größe nach geordnet sind, gilt $b_1 = 2$. Dann sind aber a und b, beide enthalten in ihrer Primzahlzerlegung eine 2, gerade und nicht teilerfremd.

Widerspruch. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (sondern irrational).

(4) Mathematiker sind erfinderisch und entwickelten daraufhin die algebraischen Zahlen. Algebraische Zahlen sind Lösungen algebraischer Gleichungen und umfassen unter anderem neben den rationalen Zahlen auch alle Zahlen deren Irrationalität analog zu dem gerade geführten Beweis gezeigt werden kann.

Aber auch diese Zahlen genügen nicht. Einen Beweis hierfür reichen wir in Kapitel 11 nach. Außerdem konnte gezeigt werde, dass die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e nicht algebraisch (sondern transzendent) sind, somit sind die algebraischen Zahlen nicht einmal innerhalb der Arithmetik ausreichend.

(5) …

Diese Betrachtungen lassen sich beliebig fortsetzen. Nur für die reellen Zahlen hat man noch kein Gegenbeispiel gefunden. Außerdem hat sich die Beziehung zwischen den Punkten der Geometrie und den reellen Zahlen der Arithmetik als brauchbar und äußerst nützlich erwiesen. Es ist äußerst unwahrscheinlich, dass irgendwann ein Beweis gefunden wird, der zeigt, dass die Zuordnung ungerechtfertigt war und zu Widersprüchen führt. Ausgeschlossen werden kann die Existenz eines solchen Beweises allerdings nicht.

KAPITEL 8

Wie viele Punkte besitzt eine endliche Gerade?

Gegeben sei eine beidseitig beschränkte Gerade der Länge m ($m \in \mathbb{R}$). Entsprechend dem vorangehenden Kapitel, ist jeder Punkt dieser Gerade umkehrbar eindeutig einer reelle Zahl zugeordnet, die den Abstand des Punktes von einem Referenzpunkt (einer der beiden Randpunkte) angibt. Somit gibt es genauso viele reelle Zahlen im Intervall $[0, m]$, wie es Punkte auf einer Geraden der Länge m gibt.

Diese Verbindung zwischen dem geometrischen Kontinuum und dem arithmetischen Kontinuum eröffnet uns nun zwei grundlegend verschiedene Verfahren zur Untersuchung der Mächtigkeit, nämlich ein geometrisches und ein arithmetisches:

(1) Mit der Funktion

$$\phi(x) = m * x$$

lässt sich jede reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$ in umkehrbar eindeutiger Weise in eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0, m]$ transformieren, $(x, \phi(x))$ ist somit eine vollständige Paarbildung zwischen den reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ und dem Intervall $[0, m]$.

(2) Diese Zuordnung lässt sich, wie in Abbildung 2 auf Seite 61 zu sehen ist, sehr gut grafisch realisieren. Dazu zeichnen wir in einem zweidimensionalen Koordinatensystem eine Gerade mit dem Anstieg m. Diese Gerade beginnt im Koordinatenursprung und endet im Punkt

$(1, m)$. Nun wählen wir uns auf der $x-$Achse einen beliebigen Punkt P zwischen 0 und 1 (inklusive der Randpunkte) und gehen vertikal nach oben, bis wir auf die eben gezeichnete Gerade stoßen. Beim Zusammentreffen im Punkt H wechseln wir die Richtung und gehen waagerecht nach links, bis wir auf die $y-$Achse treffen. Dieser Punkt P' der $y-$Achse ist damit umkehrbar eindeutig bestimmt und liegt zwischen 0 und m (inklusive der Randpunkte).

(3) Es gibt noch viele andere Möglichkeiten zur Findung von Punktzuordnungen zwischen verschieden langen Geraden. Eine dieser Möglichkeiten ist folgende (siehe Abbildung 3 auf Seite 61): Wir zeichnen einen Punkt S. Anschließend zeichnen wir zwei unendlich lange Geraden, die beide in diesem Punkt beginnen, nicht identisch sind und auch nicht in entgegengesetzte Richtungen laufen. Nun zeichnen wir eine Gerade, die beide Geraden in jeweils einem Punkt schneidet und die Länge 1 besitzt. Dann zeichnen wir eine Gerade, die parallel zur eben gezeichneten Einheitsgerade verläuft, die beide unendlichen Geraden ebenfalls in jeweils einem Punkt schneidet und die die Länge m besitzt. Zeichnen wir nun eine Gerade, die im Punkt S beginnt und die Einheitsgerade im Punkt P schneidet, so schneidet diese auch die dazu parallele Gerade in einem Punkt P'. Damit haben wir auch hier, durch Zuordnung der Schnittpunkte P und P', eine vollständige Paarbildung gefunden.

Folglich besitzt die Einheitsgerade genau so viele Punkte wie eine beliebig lange, endliche Gerade. Analog liegen im Intervall $[0, 1]$ genauso viele reelle Zahlen, wie in einem beliebig großen, endlichen Intervall. Alle diese Punktmengen bzw. Zahlmengen besitzen also die gleiche Mächtigkeit.

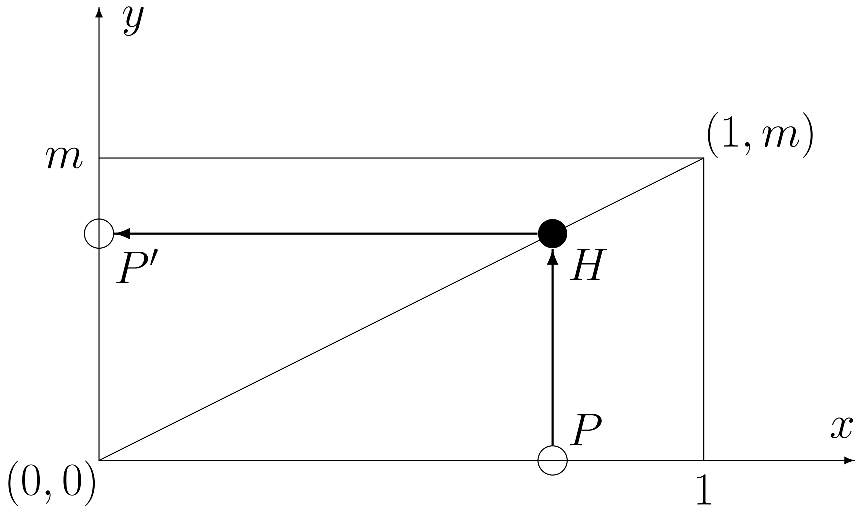

ABBILDUNG 2. Vollständige Paarbildung verschieden langer, endlich ausgedehnter Geraden durch Projektion.

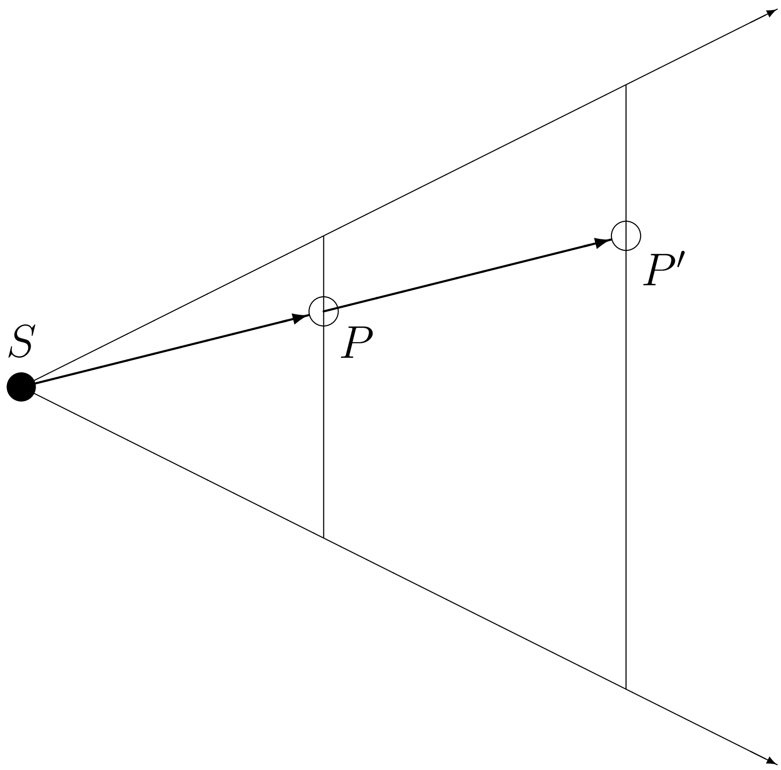

ABBILDUNG 3. Vollständige Paarbildung verschieden langer, endlich ausgedehnter Geraden durch Anwendung der Strahlensätze.

Übergang zu höheren Dimensionen

Zweidimensionale Objekte, wie Quadrate, Kreise oder Kurven, zeichnen wir üblicherweise in einem zweidimensionalen Koordinatensystem. Ein solches Koordinatensystem besitzt eine $x-$ und eine $y-$Achse. Ein Punkt der Ebene entspricht somit einem Paar zweier reeller Zahlen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Analog ist die arithmetische Entsprechung eines dreidimensionalen geometrischen Punktes ein Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Damit lassen sich aber die arithmetischen und geometrischen Streckungs- bzw. Stauchungsverfahren auch auf Ebenen, Räume und beliebig andere Dimensionen übertragen, indem diese auf die Komponenten der Koordinaten $(x,\ y,\ z,\ \ldots)$ angewendet werden. Somit besitzt u.a. der Einheitswürfel (Würfel der Kantenlänge 1) genau so viele Punkte wie ein beliebig (aber endlich) ausgedehnter Würfel bzw. Raum.

KAPITEL 9

Besitzt eine unendliche Gerade mehr Punkte?

Im vorangehenden Kapitel haben wir lediglich beliebig ausgedehnte, endliche Geraden bzw. beliebig große/kleine, endliche Intervalle betrachtet. Einen Zusammenhang mit unendlich ausgedehnten Geraden bzw. unendlich großen Intervallen haben wir noch nicht hergestellt.

Das lässt sich jedoch schnell nachholen: Mit Hilfe analytischer Funktionen und unter Einbeziehung des vorangehenden Kapitels lässt sich nämlich zeigen, dass ein unendlich großes Intervall genau so viele reelle Zahlen enthält, wie das Einheitsintervall. Analog lässt sich mit Hilfe geometrischer Abbildungen zeigen, dass eine unendlich ausgedehnte Gerade genau so viele Punkte enthält, wie die Einheitsgerade. Somit besitzen alle diese Punkt- bzw. Zahlenmengen die Mächtigkeit des Kontinuums.

(1) Es sei A die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $(-\infty, +\infty)$, B die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $[-2, +2]$ (inkl. Randpunkte) und C die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ (ohne Randpunkte). Das Intervall $(-\infty, +\infty)$ enthält das Intervall $[-2, +2]$. Das Intervall $[-2, +2]$ enthält wiederum das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Die Funktion

$$\phi(x) = tan(x)$$

liefert eine vollständige Paarbildung der reellen Zahlen aus dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ mit den reellen Zahlen aus dem Intervall $(-\infty, +\infty)$. Es gilt somit

$$||A|| \geq ||B|| \geq ||C|| = ||A|| \text{ und damit } ||A|| = ||B||.$$

(2) Analog stellt die Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{x}$$

eine Möglichkeit zur vollständigen Paarbildung der reellen Zahlen aus dem Intervall $[-1, +1]$ (ohne 0) mit den reellen Zahlen aus dem Intervall $(-\infty, +\infty)$ (ohne 0) dar. Sei A die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $(-\infty, +\infty)$ (ohne 0), B die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $[-1, +1]$ (inkl. Randpunkte, mit 0) und C die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $[-1, +1]$ (inkl. Randpunkte, ohne 0), dann gilt

$$||A|| \geq ||B|| \geq ||C|| = ||A|| \text{ und damit } ||A|| = ||B||.$$

Diese Abbildungen lassen sich analog zum ersten geometrischen Beweis des vorangehenden Kapitel grafisch veranschaulichen und stellen einen eigenständigen, unabhängigen geometrischen Beweis dar. Es existieren auch hier noch zahlreiche andere Methoden zur Findung vollständiger Punktpaarbildungen, von denen zwei hier kurz erwähnt sein sollen:

(3) Man zeichne einen Kreis K mit dem Mittelpunkt M. Außerdem zeichne man unterhalb des Kreises eine waagerechte beidseitig unendliche Gerade g. Die Gerade darf dabei den Kreis höchstens berühren aber nicht schneiden. Nun wähle man einen beliebigen Punkt P auf der Gerade g unterhalb des Kreises K. Ausgehend von dem Punkt P gehe man nun senkrecht nach oben, bis man den Kreis K im Punkt H schneidet. Nun zeichne man eine Gerade g' ausgehend vom Kreismittelpunkt M durch den Punkt H. Diese Gerade g' schneidet die Gerade g im Punkt P'. Diese Abbildungsvorschrift ($P \rightarrow P'$) liefert eine vollständige Paarbildung aller Punkte P des endlichen Abschnitts der Gerade g unterhalb des Kreises mit den Punkten P' der unendlichen Gerade g.

(4) Man nehme die Einheitsgerade und zerlege diese in zwei gleichgroße Geraden. Eine davon zerlege man wieder in zwei gleichgroße Geraden. Denkt man sich dieses Verfahren endlos fortgesetzt, so erhält man auf diese Weise unendlich viele Geraden, die beim Aneinanderlegen die Einheitsgerade ergeben würden und somit in der Summe aus gleichvielen Punkten bestehen. Diese Geraden sind jedoch unterschiedlich lang. Wir strecken nun alle Geraden auf die Länge 1. Diese Streckungen, das wissen wir bereits, ändert die Anzahl der Punkte nicht. Setzen wir nun alle diese Geraden wieder zu einer Geraden zusammen, so erhalten wir eine unendlich ausgedehnte Gerade.

Übergang zu höheren Dimensionen

Die besprochenen Verfahren lassen sich analog zum vorangehenden Kapitel auf Ebenen, Räume und beliebige andere Dimensionen übertragen. Somit besitzt u.a. der Einheitswürfel genau so viele Punkte wie ein unendlich ausgedehnter dreidimensionaler Raum.

Unendlich viele unendlich ausgedehnte Geraden

Es schließt sich nun sofort die Frage nach der Anzahl der Punkte unendlich vieler, unendlich ausgedehnter Geraden an. Dazu zwei Beweise:

(1) Gegeben seien unendlich viele, unendlich ausgedehnte Geraden. Wir stauchen alle diese Geraden nun auf die Länge der Einheitsgeraden, also der Länge 1, und setzen diese Geraden zu einer einzigen unendlich ausgedehnten Geraden zusammen.

(2) Gegeben seien unendlich viele, unendlich ausgedehnte Geraden. Wir zerlegen alle diese unendlich vielen Geraden in jeweils unendlich viele Teilgeraden der Länge 1 und nummerieren diese Teilstücke mit geordneten Paaren $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$:

$$\ldots\ (x,-2)\ (x,-1)\ (x,0)\ (x,+1)\ (x,+2)\ \ldots$$

Dabei sei x die Nummer der unendlichen Gerade und y die Nummer des Teilstücks der Geraden x. Durch Abzählung aller Paare (x, y) und entsprechendes Zusammensetzen der zugeordneten Geraden der Länge 1 erhalten wir eine einzige unendlich ausgedehnte Gerade, die alle Punkte der ursprünglich unendlich vielen, unendlich ausgedehnten Geraden enthält.[18]

[18] Dass sich die Menge aller Paare (x, y) abzählen lässt, wissen wir aus Kapitel 5.

KAPITEL 10

Und wie viele Punkte besitzt eine Ebene?

Bisher haben wir nur Geraden mit Geraden, Ebenen mit Ebenen und Räume mit Räumen verglichen. Wir wollen uns nun dem Zusammenhang zwischen Geraden, Ebenen und Räumen, oder allgemein dem Zusammenhang zwischen verschiedendimensionalen Objekten, zuwenden.

Wir betrachten dazu das Einheitsquadrat. Die arithmetische Entsprechung eines Punktes dieses Quadrates ist ein Paar zweier reeller Zahlen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit x, y aus dem Intervall $[0, 1]$. Alle reellen Zahlen aus diesem Intervall lassen sich als unendliche Dezimalbrüche $0.r_0r_1r_2r_3\ldots$ mit $r_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen. Da einige reelle Zahlen zwei verschiedene Darstellungen besitzen, nämlich eine endliche[19] und eine unendliche, beschränken wir uns in diesen Fällen auf die unendliche Darstellung. So nehmen wir zum Beispiel für die reelle Zahl 0.5 nicht die Darstellung „0.5“, sondern „0.4999...“.

Wir greifen nun eine Idee auf, die wir bereits bei den rationalen Zahlen erfolgreich anwenden konnten:

Sei (x, y) ein Punkt des Einheitsquadrates mit

$$x = 0.x_0x_1x_2x_3\ldots \text{ und } y = 0.y_0y_1y_2y_3\ldots$$

dann sei

$$\phi(x, y) = 0.x_0y_0x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

der zugehörige Punkt der Einheitsgerade. Diese Abbildung ist umkehrbar eindeutig. Es ist jedoch zu beachten, dass einige

[19] Ein Dezimalbruch ist endlich, wenn ab einer bestimmten Stelle nur noch Nullen auftreten.

Punkte der Einheitsgerade keinen Partner aus dem Einheitsquadrat erhalten, im Gegensatz dazu erhält jeder Punkt des Einheitsquadrates einen umkehrbar eindeutig bestimmten Partner der Einheitsgerade. Ein Beispiel dafür ist die reelle Zahl $0.59090909090\ldots$, die sich aus dem fairen Shuffel von 0.5 und $0.9999\ldots$ ergeben würde. Für 0.5 verwenden wir aber die Darstellung $0.4999\ldots$

Entsprechend dem eben geführten Beweis, besitzt das Einheitsquadrat höchstens so viele Punkte wie die Einheitsgerade. Die Einheitsgerade wiederum ist Teil des Einheitsquadrates und enthält somit höchstens so viel Punkte, wie das Einheitsquadrat. Dann besitzen aber Einheitsquadrat und Einheitsgerade gleich viele Punkte.[20]

Offensichtlich lässt sich der Beweis auf Geraden und beliebigdimensionale Flächen verallgemeinern. Alle Punktmengen besitzen somit die gleiche Mächtigkeit, nämlich die Mächtigkeit des Kontinuums.

Der ∞-dimensionale Raum

Betrachten wir nun die Menge

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \mathbb{R}^4 \cup \ldots = \{(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k) : r_i \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}\}$$

Diese Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet $\mathbb{R}$ besitzt analog zur universellen Sprache, „mehr“ Elemente als jeder beliebig-dimensionale Raum.

Eine noch größere Menge ist jedoch die Menge aller unendlichen Wörter über dem Alphabet $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^\infty = \{(r_1, r_2, r_3, \ldots) : r_i \in \mathbb{R}\}$$

Überraschenderweise enthält $\mathbb{R}^\infty$ und somit auch $\mathbb{R}^*$ genau so viele Elemente wie $\mathbb{R}$:

[20] Man beachte, dass es sich hierbei um einen rein arithmetischen Beweis handelt. Ein geometrischer Beweis ist nicht möglich.

Die Beweise der beiden vorangehenden Kapitel funktionieren nämlich auch für $\mathbb{R}^\infty$. Somit besitzt ein unendlichdimensionaler Raum genau so viele Punkte, wie ein unendlichdimensionaler Einheitswürfel.

Ein Punkt $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_i, \ldots)$ dieses Einheitswürfels ist eine unendliche Folge reeller Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$. Jede reelle Zahl r_i lässt sich als unendliche Folge $0.r_{i,1}r_{i,2}r_{i,3}\ldots$ von Buchstaben über dem Alphabet $\{0, \ldots, 9\}$ darstellen. Wir beschränken uns hierbei wieder auf die unendlichen Dezimalbrüche, sofern eine reelle Zahl zwei Darstellungen besitzt. Bei der Betrachtung rationaler Zahlen haben wir Möglichkeiten kennen gelernt, die Menge aller Paare zweier natürlicher Zahlen abzuzählen. Damit sind auch alle unendlich vielen Buchstaben der unendlich vielen reellen Zahlen eines unendlichdimensionalen Punktes abzählbar, indem wir statt (i, j) den Buchstaben $r_{i,j}$ abzählen. Die Abzählung liefert uns eine unendliche Folge von Buchstaben über dem Alphabet $\{0, \ldots, 9\}$ und somit, wenn wir noch „0.“ davor schreiben, eine eineindeutig bestimmte reelle Zahl der Einheitsgeraden. Es ist auch hier wieder zu beachten, dass nicht alle Punkte der Einheitsgeraden einen Partner finden, was uns aber nicht stört.

KAPITEL 11

Ist das Kontinuum abzählbar?

Alle bisher betrachteten unendlichen Zahlmengen bzw. Punktmengen besitzen entweder die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen oder die Mächtigkeit des Kontinuums. Auf den ersten Blick scheint das Kontinuum deutlich mehr Elemente zu besitzen, als die Menge der natürlichen Zahlen. Wir wissen aber aus den vorangehenden Kapiteln, dass der Schein trügen kann, da ja auch die Menge der rationalen Zahlen scheinbar deutlich mehr Elemente als die Menge der natürlichen Zahlen enthält. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass die Menge der natürlichen Zahlen und das Kontinuum gleichmächtig sind, somit alle bisher betrachteten Mengen gleich viele Elemente besitzen bzw. es im aktual unendlich Großen keine Mächtigkeitsunterschiede gibt.

(1) Gegeben sei eine beidseitig unendlich ausgedehnte Gerade g_1, eine beliebige Abzählung ϕ von Punkten der Gerade g_1 und eine endlich ausgedehnte Gerade g_2. (Für den folgenden Beweis genügt die Forderung, dass die Gerade g_1 länger als g_2 sein muss. Somit darf g_1 auch endlich sein.)

Wir teilen nun die Gerade g_2 in zwei gleich große Geraden s_1 und t_1 und positionieren die Gerade s_1, wir nennen diese Schirmchen 1, mittig über den ersten abgezählten Punkt der Geraden g_1. Schirmchen 1 wird dabei weder gestreckt noch gestaucht. Anschließend teilen wir die Gerade t_1 in zwei gleichgroße Geraden s_2 und t_2 und positionieren die Gerade s_2, Schirmchen 2, mittig über den zweiten abgezählten Punkt der Geraden

g_1. Auch Schirmchen 2 behält seine ursprüngliche Länge bei. Dieses Verfahren denken wir uns nun potentiell unendlich fortgesetzt: Wir teilen also die Gerade t_i in zwei gleich große Geraden s_{i+1} und t_{i+1} und positionieren Schirmchen $i+1$ ohne Längenveränderung mittig über den $(i+1)$-ten abgezählten Punkt der Geraden g_1.

Offensichtlich wird jeder abgezählte Punkt der Geraden g_1 durch ein Schirmchen überdeckt. Da ein Schirmchen nicht nur einen Punkt, sondern ein ganzes Teilstück der Geraden g_1 überdeckt, kann es sein, dass auch nicht abgezählte Punkte überdeckt werden, oder dass sich einige Schirmchen überlappen.

Jedes Schirmchen ist ein Teilstück der endlichen Geraden g_2.[21] Daher wird durch die Schirmchen in der Summe nur ein endlicher Abschnitt der Geraden g_1 überdeckt: Falls keine Schirmchenüberlappungen existieren, besitzt dieser Abschnitt die Länge der Geraden g_2, ansonsten ist er entsprechend kürzer.[22] Da die Gerade g_1 aber unendlich (und somit deutlich länger) ist, werden die meisten Punkte von g_1 nicht überdeckt. Dann gibt es aber zwangsläufig nicht-abgezählte Punkte, da ja mindestens alle abgezählten Punkte überdeckt werden.

Es sei P die Menge der Punkt der Geraden g_1 und somit eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums. Wir haben gerade gezeigt, dass sich die Elemente der Menge P nicht abzählen lassen, da jede Abzählung zwangsläufig die meisten Punkte „vergisst". Die Menge P und somit das geometrische Kontinuum sind also nicht abzählbar und somit *überabzählbar*. Dann gibt es aber auch keine

[21] Man beachte hierbei auch das Kapitel über die potentielle Unendlichkeit.

[22] Ganz ohne Arithmetik kommen wir leider doch nicht aus: Für die Summe der Schirmchen in ihrer ursprünglichen Ordnung gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|g_2|}{2^i} = |s_1| + |s_2| + \ldots = |g_2|$. Aufgrund der Kommutativität der Addition und der Konvergenz dieser Summe gegen $|g_2|$, konvergiert JEDE beliebige Umordnung der Schirmchen ebenfalls gegen $|g_2|$.

vollständige Paarbildung zwischen den Elementen der Menge P und den Elementen der Menge $\mathbb{N}$, da eine solche Paarbildung aufgrund der Abzählbarkeit der natürlichen Zahlen, eine Abzählung der Elemente der Menge P ermöglichen würde. Es gilt daher $||P|| \neq ||\mathbb{N}||$. Zusammen mit der offensichtlich geltenden Beziehung $||P|| \geq ||\mathbb{N}||$, folgt daraus $||P|| > ||\mathbb{N}||$. Das geometrische Kontinuum besitzt also eine größere Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen.

Nun könnte man schnell auf die Idee kommen, dass es ja auch ausreichen würde, die Schirmchen über allen rationalen Zahlen aufzuspannen. Da sich die rationalen Zahlen beliebig dicht an alle reellen Zahlen „herankuscheln" und zudem noch abzählbar sind, müsste sich doch damit jede reelle Zahl überdecken lassen, oder? Es lässt sich jedoch sehr leicht zeigen, dass dem nicht zwangsläufig so ist: Dazu wählen wir vor dem Aufspannen der Schirmchen eine beliebige irrationale reelle Zahl t (z.B. $\sqrt{2}$) als Punkt der Geraden g_1. Nun stellen wir beim Aufbauen der einzelnen Schirmchen sicher, dass diese niemals den Punkt t überdecken, indem wir stets ein Schirmchen wählen, das klein genug ist und noch nicht verwendet wurde. - Somit gibt es Überdeckungen aller rationalen Zahlen, die mindestens eine reelle Zahl nicht überdecken.

Dies lässt sich zwangsläufig (sonst würde der Beweis zur Überabzählbarkeit der Punkte der Gerade g_1 zu einem Widerspruch führen) verallgemeinern: Jede Überdeckung aller rationalen Zahlen mit Schirmchen, deren Summe konvergiert, vergisst mindestens eine reelle Zahl.

Die Summe endlich vieler Zahlen ($< \infty$) ist stets endlich. Gemäß den Untersuchungen aus Kapitel 2 ist die Summe abzählbar unendlich vieler Zahlen endlich oder unendlich. Aufgrund des hier gefundenen Beweises ist die Summe überabzählbar vieler Zahlen stets unendlich: Ansonsten hätte man nämlich mit diesen überabzählbar vielen Schirmchen eine Überdeckung aller Punkte der Gerade g_1, die aber gleichzeitig einige Punkte nicht überdeckt. Widerspruch.[23]

Da das geometrische Kontinuum überabzählbar ist, muss zwangsläufig auch das arithmetische Kontinuum, also die Menge der reellen Zahlen, überabzählbar sein. Ansonsten wäre die Verbindung zwischen Geometrie und Arithmetik widersprüchlich. - Ganz nebenbei haben wir hiermit einen Beweis gefunden, dass die rationalen Zahlen, aber auch die algebraischen Zahlen, aufgrund ihrer Abzählbarkeit, für die Verbindung zwischen Geometrie und Arithmetik nicht ausreichen.

(2) Gegeben sei die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, eine beliebige Abzählung ϕ von reellen Zahlen und ein beliebiges Intervall $[a, b]$.

Wir ermitteln aus der Abzählung ϕ die ersten beiden reellen Zahlen a_1 und b_1 mit $a_1 < b_1$, die sich innerhalb des Intervalls $[a, b]$ befinden. Anschließend ermitteln wir die nächsten beiden reellen Zahlen a_2 und b_2 mit $a_2 < b_2$, die sich innerhalb des Intervalls $[a_1, b_1]$ befinden. Dieses Verfahren denken wir uns nun potentiell unendlich fortgesetzt: Wir ermitteln also die nächsten beiden reellen Zahlen a_{i+1} und b_{i+1} mit $a_{i+1} < b_{i+1}$, die sich innerhalb des Intervalls $[a_i, b_i]$ befinden. Falls nur noch eine solche Zahl gefunden werden kann, so sei diese a_{i+1} und wir setzen $b_{i+1} = b_i$. Falls keine Zahl mehr gefunden werden kann, so setzen wir $a_{i+1} = a_i$ und $b_{i+1} = b_i$.

Der beschriebene Prozess liefert eine potentiell unendliche Intervallschachtelung. Jede durch ϕ abgezählte reelle

[23] Diese Argumentation enthält noch eine kleine Lücke: Es könnte sein, dass Fußnote 22 für überabzählbare Summen nicht gilt.

Zahl r wird im Laufe dieses Prozesses genau einmal angeschaut. Befindet sich r außerhalb oder auf dem Rand des zu diesem Zeitpunkt gültigen Intervalls, so wird r nicht weiter beachtet und bleibt auch in Zukunft außerhalb oder auf dem Rand. Befindet sich r innerhalb, so bildet r im nächsten Schritt einen der beiden Ränder des Intervalls und bleibt auch weiterhin Intervallrand oder befindet sich ab dem übernächsten Schritt außerhalb. Somit befindet sich keine von ϕ abgezählte reelle Zahl innerhalb (aller Intervalle) der Intervallschachtelung.

Fall 1: Werden die Intervalle der Intervallschachtelung nicht beliebig klein, so befinden sich unendlich viele reelle Zahlen innerhalb der Intervallschachtelung. Fall 2: Werden die Intervalle beliebig klein, so beschreibt diese Intervallschachtelung genau eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.[24] Diese reelle Zahl befindet sich innerhalb oder auf dem Rand der Intervallschachtelung. In unserem Fall kann Sie sich nur innerhalb der Intervallschachtelung befinden, da sich die Ränder ständig ändern, sich somit nicht fixieren lassen, und sich daher keine (fixierte) reelle Zahl dauerhaft auf dem Rand aufhalten kann. Somit gibt es sowohl in Fall 1 als auch in Fall 2 mindestens eine reelle Zahl, die sich innerhalb der Intervallschachtelung befindet. Dann kann diese reelle Zahl aber nicht von ϕ abgezählt werden, da sich ja alle abgezählten reellen Zahlen außerhalb oder auf dem Rand der Intervallschachtelung befinden.

[24] Jede Intervallschachtelung von reellen Zahlen lässt sich, da zwischen zwei reellen Zahlen beliebig viele rationale Zahlen existieren, in eine äquivalente Intervallschachtelung von rationalen Zahlen transformieren. Intervallschachtelungen von rationalen Zahlen dienen aber der Definition der reellen Zahlen. Zum Beispiel ist die Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl lediglich eine spezielle Intervallschachtelung.

Damit ist $\mathbb{R}$ aber überabzählbar, da für jede Abzählung mindestens eine „vergessene“ reelle Zahlen gefunden werden kann.

Da es beliebig viele disjunkte Intervalle $[a, b]$ gibt und sich in jedem Intervall mindestens eine „vergessene“ reelle Zahl befindet, wurden nicht nur eine, sondern sehr viele reelle Zahlen „vergessen“. Gemäß Kapitel 4 ist die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen abzählbar. Folglich ist die Menge der „vergessenen“ reellen Zahlen überabzählbar, es gibt also deutlich mehr vergessene, als abgezählte reelle Zahlen.

Aufgrund der Bedeutung dieser Erkenntnis, wollen wir uns noch einen zweiten Beweis für die Überabzählbarkeit des arithmetischen Kontinuums ansehen. Dieses Verfahren wird das Cantorsche Diagonalverfahren genannt:

(3) Gegeben sei die Menge $\mathbb{R}_{[0,1]}$ der reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ und eine beliebige Abzählung ϕ von reellen Zahlen aus diesem Intervall.

Jede reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$ außer der 0 besitzt genau eine unendliche Dezimalbruchdarstellung der Form $0.x_1x_2x_3\ldots$ mit $x_i \in \{0, \ldots, 9\}$. Wir identifizieren im Folgenden reelle Zahlen mit diesen Darstellungen und die 0 mit der Darstellung $0.000\ldots$

Wir konstruieren nun die Diagonalzahl $d = 0.d_1d_2d_3\ldots$. Dazu ermitteln wir die erste Nachkommastelle a_1 der ersten von ϕ abgezählten reellen Zahl $a = 0.a_1a_2a_3\ldots$ und sorgen dafür, dass sich die erste Nachkommastelle d_1 unserer Diagonalzahl d von a_1 unterscheidet. Anschließend ermitteln wir die zweite Nachkommastelle b_2 der zweiten abgezählten reellen Zahl $b = 0.b_1b_2b_3\ldots$ und sorgen dafür, dass sich die zweite Nachkommastelle d_2 unserer Diagonalzahl d von b_2 unterscheidet. Dieses Verfahren denken wir uns potentiell unendlich fortgesetzt: Wir ermitteln die i-te Nachkommastelle r_i der i-ten abgezählten reellen Zahl $r = 0.r_1r_2r_3\ldots$ und sorgen dafür, dass sich die i-te Nachkommastelle d_i unserer Diagonalzahl d von r_i unterscheidet. Die Konstruktion könnte zum Beispiel so aussehen:

r_1	$=$	$0.\mathbf{3}8640978766565\ldots$
r_2	$=$	$0.8\mathbf{6}100323953544\ldots$
r_3	$=$	$0.99\mathbf{9}99999999999\ldots$
r_4	$=$	$0.000\mathbf{0}0000000000\ldots$
r_5	$=$	$0.4999\mathbf{9}999999999\ldots$
r_6	$=$	$0.48021\mathbf{8}88843654\ldots$
r_7	$=$	$0.587604\mathbf{3}8363223\ldots$
r_8	$=$	$0.4309798\mathbf{3}645643\ldots$
r_9	$=$	$0.59687765\mathbf{4}35326\ldots$
r_{10}	$=$	$0.697866666\mathbf{8}6654\ldots$
r_{11}	$=$	$0.5857543356\mathbf{1}675\ldots$
r_{12}	$=$	$0.45876587658\mathbf{6}21\ldots$
r_{13}	$=$	$0.276439843222\mathbf{3}3\ldots$
r_{14}	$=$	$0.6598768898665\mathbf{3}\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
d	$=$	$0.47010944592744\ldots$

Die so konstruierte Diagonalzahl ist die Darstellung einer reellen Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$. Allerdings haben wir sie so konstruiert, dass sie sich von den unendlichen Dezimalbruchdarstellungen aller von ϕ abgezählten reellen Zahlen unterscheidet. Handelt es sich bei d um eine endliche Dezimalbruchdarstellung, so gibt es eine äquivalente unendliche Dezimalbruchdarstellung, die unter Umständen durch ϕ abgezählt wird. Handelt es sich bei

> d um eine unendliche Dezimalbruchdarstellung, so beschreibt d eine nicht abgezählte reelle Zahl aus dem Intervall $[0,1]$. Durch Beschränkung der Nachkommastellen auf die Zahlen 1 bis 9 können wir sicherstellen, dass es sich bei d stets um eine unendliche Dezimalbruchdarstellung einer nicht abgezählten reellen Zahl handelt.
>
> Dann ist die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $[0,1]$ aber überabzählbar, da zu jeder Abzählung beliebig viele „vergessene" reelle Zahlen mit dem Diagonalverfahren konstruiert werden können.

Wir haben in diesem Kapitel eine erstaunliche Entdeckung gemacht: Es gibt (mindestens) zwei verschiedene Formen der Unendlichkeit. Der Unterschied zwischen der abzählbaren Unendlichkeit und der überabzählbaren Unendlichkeit ist dabei in etwa so gravierend, wie der Unterschied zwischen der Endlichkeit und der abzählbaren Unendlichkeit:

In Kapitel 6 mussten alle Hotels mit abzählbar unendlich vielen Zimmern aufgrund Baumängel geschlossen werden. Zum Glück konnten alle Gäste in das einzige noch geöffnete Hotel umquartiert werden. Nun gab es aber auch ein Hotel, in dem als Zimmernummern reelle Zahlen verwendet wurden. Es gab somit genau so viele Zimmer wie reelle Zahlen. Können auch hier alle, oder wenigstens die meisten, Gäste in das Hotel mit den abzählbar unendlich vielen Zimmern umquartiert werden? Die Antwort lautet: Nein!

KAPITEL 12

Gibt es noch mächtigere Mengen?

Gemäß dem vorangehenden Kapitel gibt es zwei grundlegend verschiedene Mächtigkeitsklassen unendlicher Mengen. Nämlich zum einen die Klasse der Mengen von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und zum anderen die Klasse der Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums. Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums sind mächtiger, besitzen also mehr Elemente, als Mengen von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen.

Es stellt sich nun zwangsläufig die Frage nach der Existenz weiterer Mächtigkeitsklassen:

(1) Gibt es Mengen, die mächtiger als die endlichen Mengen, aber schmächtiger als die Menge der natürlichen Zahlen sind?

(2) Gibt es Mengen, die mächtiger als die Menge natürlichen Zahlen, aber schmächtiger als das Kontinuum sind?

(3) Gibt es Mengen, die mächtiger als das Kontinuum sind?

(4) Gibt eine größte bzw. mächtigste Menge?

Die zweite Frage ist Gegenstand der (speziellen) *Kontinuums-hypothese*[25] und lässt sich in den heute üblichen Mengentheorien nicht beantworten. Die Antwort auf die erste Frage reichen wir in einer kleinen Fußnote von Kapitel 13 nach. Die Antwort

[25]Die spezielle Kontinuumshypothese beschäftigt sich mit der Frage, ob es zwischen der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen ($= \aleph_0$) und der Mächtigkeit des Kontinuums ($= \aleph_1$) weitere Mächtigkeiten gibt: „$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$?“. Die allgemeine Kontinuumshypothese verallgemeinert diese Fragestellung auf noch höhere Mächtigkeiten: „$\aleph_{a+1} = 2^{\aleph_a}$?“ Georg Cantor versuchte die Kontinuumshypothese zu beweisen oder zu widerlegen. Es ist ihm nicht gelungen. Heute wissen wir, dass es ihm nicht gelingen konnte.

auf die vierte Frage beantworten wir in Kapitel 14. Die Antwort auf die dritte Frage lautet: Ja!

Der dafür notwendige Beweis ist eine Verallgemeinerung des Cantorschen Diagonalverfahrens aus dem vorangehenden Kapitel. Wir hatten bewiesen, dass sich die reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ nicht abzählen lassen bzw. dass es keine vollständige Paarbildung zwischen den natürlichen Zahlen und den unendlichen Dezimalbruchdarstellungen reeller Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ gibt. Unter Vernachlässigung des Anfangs „0.“, sind die Dezimalbruchdarstellungen lediglich unendliche Wörter über dem Alphabet $\{0, \ldots, 9\}$. Mittels 0-1-Blockkodierung lässt sich jedes unendliche Wort über diesem Alphabet umkehrbar eindeutig in ein unendliches Wort über dem Alphabet $\{0, 1\}$ transformieren ($0 \rightarrow 0000, 1 \rightarrow 0001, \ldots, 9 \rightarrow 1001$). Ein solches unendliches Wort lässt sich wiederum umkehrbar eindeutig als Teilmenge der natürlichen Zahlen darstellen: Sei w ein unendliches Wort über dem Alphabet $\{0, 1\}$ und $w[i]$ der i-te Buchstabe von w, dann sei $W = \{i \in \mathbb{N} : w[i] = 1\}$ die zugeordnete Menge. Somit lässt sich der Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ in einen Beweis der Überabzählbarkeit der Potenzmenge[26] der natürlichen Zahlen umformen, es gilt $||\mathbb{R}|| = ||P(\mathbb{N})||$. Den letzten Schritt zur Verallgemeinerung liefert die Ersetzung der Menge der natürlichen Zahlen durch eine beliebige Menge:

Gegeben sei eine beliebige Menge M mit der dazugehörigen Potenzmenge $P(M)$.

Jedem Element $m \in M$ lässt sich umkehrbar eindeutig das Element $\{m\} \in P(M)$ zuordnet. Somit ist M gleichmächtig zu einer Teilmenge von $P(M)$. Es gilt daher

$$||M|| \leq ||P(M)||$$

[26] Die Potenzmenge $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen der Menge M inklusive der leeren Menge.

Gegeben sei nun zusätzlich eine beliebige Abbildung ϕ von M in $P(M)$.

Mit Hilfe dieser Abbildung „konstruieren“ wir die Menge

$$D = \{m \in M : m \notin \phi(m)\}$$

Diese Diagonalmenge D enthält ein Element m aus M, genau dann wenn es nicht in der Menge $\phi(m)$ vorkommt. Offensichtlich gilt $D \subseteq M$ und somit $D \in P(M)$.

Wegen $m \in D \iff m \notin \phi(m)$, unterscheidet sich die Menge D an mindestens einer Stelle von jedem Bild der Abbildung ϕ. Sei zum Beispiel $M = \mathbb{N}$ und $7 \in \phi(7)$, dann gilt $7 \notin D$ und somit $\phi(7) \neq D$. Damit ist D zwar ein Element von $P(M)$, wird aber durch ϕ keinem Element aus M zugeordnet und bleibt daher bei der durch ϕ beschriebenen Paarbildung als Single übrig. Die Paarbildung ist nicht vollständig.

Da ϕ aber beliebig (ohne Einschränkungen) gewählt wurde, kann es überhaupt keine vollständige Paarbildung zwischen M und $P(M)$ geben, da für jede vermeintlich vollständige Paarbildung eine Diagonalmenge präsentiert werden könnte. Es gilt also $||M|| \neq ||P(M)||$ und somit

$$||M|| < ||P(M)||$$

Sei nun $M = \mathbb{N}$, dann gilt

$$||\mathbb{N}|| < ||P(\mathbb{N})||$$

Sei $M = P(\mathbb{N})$, dann gilt

$$||P(\mathbb{N})|| < ||P(P(\mathbb{N}))||$$

Sei

$$P^i(\mathbb{N}) = \underbrace{P(P(\ldots P(}_{i \text{ mal}}\mathbb{N})\ldots))$$

und

$$P^* = P(\mathbb{N}) \cup P^2(\mathbb{N}) \cup P^3(\mathbb{N}) \cup \ldots$$

dann gilt

$$||\mathbb{N}|| < ||P(\mathbb{N})|| < ||P^2(\mathbb{N})|| < \ldots < ||P^*(\mathbb{N})|| < ||P(P^*(\mathbb{N}))|| < \ldots$$

Die Hierarchie der Mächtigkeiten ist wahrhaftig unendlich!

Das Cantorsche Diagonalverfahren hat uns die Tür zur Unendlichkeit geöffnet. Die wahre Bedeutung des Diagonalverfahrens liegt jedoch darin, das sich dieses Verfahren auch auf andere Theorien übertragen lässt und dort ebenso bedeutungsvolle Resultate hervorbringt:

Berechenbarkeits- bzw. Halteproblem

Sämtliche heute bekannten Programmiersprachen, egal ob Pascal, C, Java, Assembler, etc. haben ihren Ursprung in dem theoretischen Konzept der Turingmaschinen. Und sämtliche Programmiersprachen sind gleichmächtig, d.h. es lassen sich die gleichen Funktionen berechnen.

Zu jeder berechenbaren Funktion gibt es in der Programmiersprache der Turingmaschinen einen Algorithmus / Quellcode. (Wird definieren hierbei $f(x) := \infty$, falls $f(x)$ nicht terminiert.) Es gibt auch Turingmaschinen bzw. berechenbare Funktionen c, die können einen Quellcode auf syntaktische Korrektheit überprüfen und diesen Quellcode interpretieren bzw. simulieren: $c(f, x) := f(x)$. Daraus konstruieren wir eine Funktion c' mit $c'(f) := c(f, f)$. Mithilfe der Funktion $c'(f)$ konstruieren wir nun eine Diagonalfunktion, also eine Funktion, die sich von sämtlichen berechenbaren Funktionen unterscheidet: $d(f) := c'(f) + 1$, falls $c'(f) < \infty$ bzw. $d(f) := 0$, falls $c'(f) = \infty$.

Es gilt $d(d) = c'(d) + 1 = c(d, d) + 1 = d(d) + 1$ falls $c'(d) < \infty$ bzw. $d(d) = 0$ falls $c'(d) = c(d, d) = d(d) = \infty$. Widerspruch. Folglich gibt es zur Funktion $d(f)$ keinen Turingmaschinenalgorithmus, es gibt somit keine Turingmaschine bzw. die Funktion $d(f)$ ist nicht berechenbar:

Es gibt nicht-berechenbare Funktionen.

Dieses Ergebnis erscheint paradox: Die Funktion $c'(f)$ ist berechenbar, $d(f) = c'(f) + 1$ aber nicht.

Hätten wir jedoch die Funktion $d(f)$ geringfügig anders definiert, nämlich $d(f) := c'(f) + 1$, auch für $c'(f) = \infty$, so wäre $d(f)$ berechenbar, allerdings wäre $d(f)$ dann auch eine völlig andere Funktion. Die Problemstelle ist daher offensichtlich das Terminieren der Berechnung (Halteproblem). Könnte der Algorithmus $d(f)$ erkennen, ob $f(f)$ terminiert, wäre die Funktion $d(f)$ nämlich problemlos berechenbar: Teste ob $f(f)$ terminiert. Wenn ja, dann rechne analog zu $c'(f)$ und addiere zum Schluss eine Eins hinzu. Ansonsten terminiere und gib eine 0 zurück.

Die Funktion $d(f)$ ist eine Diagonalisierung gegen jede berechenbare Funktion und somit nicht berechenbar. Als Ursache der Nicht-Berechenbarkeit haben wir soeben das Halteproblem identifiziert:

Ein Algorithmus kann niemals
seine eigene Terminierung entscheiden.

Erster und Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz

Zum Beweisen von Aussagen verwenden wir eine mit endlich vielen Axiomen formalisierbare Theorie und eine endliche Menge von Beweisverfahren (z.B. direkter Beweis, Widerspruchsbeweis, vollständige Induktion, ...).

Sei g eine beliebige berechenbare Funktion, so sind wir evtl. mit Hilfe der uns bekannten Beweisverfahren in der Lage die Aussage „$g(x) = 0$“ zu beweisen. Wir konstruieren auf der Grundlage der Theorie der Turingmaschinen und der uns bekannten Beweisverfahren einen Theorembeweiser $p(g, x)$ für die Aussage „$g(x) = 0$“ bzw. $p'(g)$ für die Aussage „$g(g) = 0$“. (Hierbei liefert $p(g, x)$ bzw. $p'(g)$ eine 1 wenn ein Beweis der Aussage gefunden wurde bzw. 0 wenn es sich um eine widerlegbare Aussage handelt.)

Wir diagonalisieren nun gegen jede berechenbare Funktion analog zu $d(f)$, lassen aber diesmal einen Ausweg offen: Es gilt $p'(p') = 1 \rightarrow p'(p') = 0$ oder $p'(p') = 0 \rightarrow p'(p') = 1$ oder $p'(p') = \infty$. Folglich gilt $p'(p') = \infty$ bzw. $p'(p')$ terminiert nicht.

Die Aussage „$p'(p') = 0$“ ist somit durch unseren Theorembeweiser (und somit auch durch uns) weder beweisbar noch widerlegbar. Wenn aber $p'(p')$ nicht terminiert, so ist die Aussage „$p'(p') = 0$“ falsch bzw. $\phi :=$ „$p'(p') <> 0$“ wahr:

Es gibt in hinreichend ausdrucksstarken widerspruchsfreien Theorien wahre aber nicht beweisbare Aussagen.[27].

[27] Gödel zeigte den Unvollständigkeitssatz für die elementare Arithmetik (natürliche Zahlen mit Addition und Multiplikation). Zu seiner Zeit gab es weder die Theorie der Turingmaschinen noch ein anderes Berechenbarkeitsmodell und schon gar nicht algorithmisch unentscheidbare Probleme wie das Halteproblem. Ein einfaches Hineinkodieren von Turingmaschinen in die Arithmetik war daher nicht möglich. Gödel war somit gezwungen ein eigenes Berechenbarkeitsmodell auf der Basis der natürlichen Zahlen zu entwickeln und ein Äquivalent zum Halteproblem zu finden.

Dieses Ergebnis erscheint paradox: Wir haben eine spezielle Aussage ϕ konstruiert, von der wir beweisen können, dass sie wahr ist. Gleichzeitig haben wir damit aber bewiesen, dass sie nicht beweisbar ist und hätten somit den gerade getätigten Beweis gar nicht führen können!?

Die Erklärung: Wir haben während des gesamten Beweises vorausgesetzt, dass sowohl die Theorie der Turingmaschinen als auch unserer Beweisverfahren widerspruchsfrei sind. Somit haben wir lediglich bewiesen: „Ist die Theorie der Turingmaschinen widerspruchsfrei und sind unsere Beweisverfahren korrekt, so ist die Aussage ϕ wahr aber nicht beweisbar". Den gleichen Beweis kann auch unser Theorembeweiser $p'(g)$ führen. Während wir die Widerspruchsfreiheit unkorrekterweise einfach unterstellt haben, ist unser Theorembeweiser $p'(g)$ aber auf einen echten Beweis angewiesen. Das wahre Problem ist somit der Beweis der Widerspruchsfreiheit der Theorie der Turingmaschinen in Kombination mit unseren üblichen Beweisverfahren:

Für hinreichend ausdrucksstarke widerspruchsfreie Theorien ist die Widerspruchsfreiheit nicht beweisbar.

KAPITEL 13

Kann man mit der Unendlichkeit rechnen?

In den vorangehenden Kapiteln haben wir uns mit der aktualen Unendlichkeit durch Untersuchung spezieller aktual unendlicher Mengen beschäftigt. Dieser Weg ist für tiefergehende Untersuchungen zu kompliziert, da wir erstens eine Theorie bräuchten, die diese speziellen (von unserer Anschauung abhängigen) Mengen unterstützt und zweitens die gefunden Beweise immer wieder auf andere (ähnliche) Mengen übertragen müssten.

In diesem Kapitel wollen wir daher die Theorie der *Ordinalzahlen* kennen lernen. Ordinalzahlen sind eine Erweiterung der natürlichen Zahlen auf das Unendliche. In der Theorie lassen sich sämtliche Mächtigkeitsbeweise führen und wir erhalten die Möglichkeit mit dem Unendlichen zu rechnen…

Axiomatisierung der Ordinalzahlen

…Dafür müssen wir jedoch das Konzept der natürlichen Zahlen zum Konzept der *Ordinalzahlen* erweitern:

(1) Es seien a, b und c drei Ordinalzahlen. Dann gilt $a \leq a$ (Reflexivität), $(a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b$ (Antisymmetrie), $(a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$ (Transitivität) und $a \leq b \vee b \leq a$ (Vergleichbarkeit, Totalität).

(2) Ist M eine Menge von Ordinalzahlen, dann gibt es eine kleinste Ordinalzahl m, die größer[28] ist als alle Ordinalzahlen aus M.

Gemäß dieser Axiomatisierung gibt es jenseits „aller Ordinalzahlen“ der leeren Menge $\emptyset$ eine kleinste Ordinalzahl, diese bezeichnen wir mit 0. Jenseits der Ordinalzahlen der Menge $\{0\}$ gibt es die Ordinalzahl 1. Jenseits der Ordinalzahlen der Menge $\{1\}$ oder der Menge $\{0, 1\}$ gibt es die Ordinalzahl 2. Es folgen die Ordinalzahlen 3, 4, 5, 6, 7, … Jenseits der Menge aller *endlichen Ordinalzahlen* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ gibt es entsprechend der Axiomatisierung eine kleinste Ordinalzahl, die größer ist als jede endliche Ordinalzahl, diese bezeichnen wir mit ω. Es handelt sich dabei um die kleinste *transfinite Ordinalzahl*. Danach kommen $\omega{+}1$, $\omega{+}2$, $\omega{+}3$, …, 2ω, $2\omega{+}1$, $2\omega{+}2$, …, 3ω, …, 4ω, …, ω^2, $\omega^2{+}1$, …, $\omega^2{+}\omega$, $\omega^2{+}\omega{+}1$, …, $\omega^2{+}2\omega$, …, ω^3, …, ω^ω, …, ω^{ω^ω}, …, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, …, ε, …

Spezielle Ordinalzahlen

Ordinalzahlen mit endlich vielen Vorgängern heißen *endliche Ordinalzahlen*. Ordinalzahlen mit unendlich vielen Vorgängern heißen *transfinite Ordinalzahlen*. Die meisten Ordinalzahlen besitzen dabei einen direkten Vorgänger. Ordinalzahlen ohne

[28] Es gilt $a < b \leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b$.

direkten Vorgänger (mit Ausnahme der 0) heißen *Limeszahlen*. Zum Beispiel sind ω, 2ω, 3ω, …, ω^2, …, ω^ω usw. Limeszahlen, dagegen sind 0, 1, 2, 3, …, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, …, $2\omega+1$, …, $3\omega+1$, …, ω^2+1, … keine Limeszahlen.

Sei x eine Ordinalzahl, dann ist O_x die Menge aller Ordinalzahlen kleiner x. (Es gilt z.B. $O_\omega = \mathbb{N}_0$.) Eine Ordinalzahl x ist abzählbar, wenn O_x eine abzählbare Menge ist. Allgemein schreiben wir der Ordinalzahl x sämtliche Mengeneigenschaften der Menge O_x zu bzw. identifizieren die Ordinalzahl x mit der Menge O_x ($0 \equiv \emptyset$, $1 \equiv \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 \equiv \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 \equiv \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, …).[29] Zwei Ordinalzahlen a und b gehören zur selben Zahlenklasse, wenn gilt $||O_a|| = ||O_b||$. Die kleinste Ordinalzahl einer jeden Zahlenklasse nennen wir *Kardinalzahl*. (Aufgrund der Axiomatisierung der Ordinalzahlen besitzt jede Menge von Ordinalzahlen ein kleinstes Element.)

Die Ordinalzahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ aber auch die Ordinalzahl ω sind Kardinalzahlen. Zur Unterscheidung zwischen der Ordinalzahl ω und der Kardinalzahl ω schreiben wir für die Kardinalzahl ω meistens $\aleph_0$. Kapitel 3 zeigt, dass $\omega+1$ keine Kardinalzahl sein kann, da $||O_{\omega+1}|| = ||O_\omega||$. Analog zeigen Kapitel 4, 5 und 6, dass unter anderem die Ordinalzahlen 2ω (ersetzen von $\mathbb{Z}$ durch $O_{2\omega}$), ω^2 (ersetzen von $\mathbb{Q}_+$ durch O_{ω^2}), ω^ω (ersetzen von $\mathbb{N}^*$ durch O_{ω^ω}) und ε keine Kardinalzahlen sein können und sich auch dazwischen keine Kardinalzahlen befinden - Die genannten transfiniten Ordinalzahlen sind abzählbar.

Es stellt sich nun die Frage, ob es überhaupt Kardinalzahlen größer ω gibt. Die Antwort lautet *Ja!*: Gemäß Axiomatisierung gibt es nämlich jenseits der abzählbaren Ordinalzahlen eine kleinste Ordinalzahl $\aleph_1$. Diese Ordinalzahl ist größer als jede abzählbare Ordinalzahl und kann demnach keine abzählbare Ordinalzahl sein. Da alle kleineren Ordinalzahlen abzählbar sind, ist $\aleph_1$ die

[29] Für die Ordinalzahlen benötigen wir somit keinen, ggf. irgendwann erschöpften und von unserer Anschauung abhängigen, Zahlenvorrat.

kleinste überabzählbare Ordinalzahl und somit eine Kardinalzahl.

Endliche Ordinalzahlen nennen wir *Ordinalzahlen der ersten Zahlenklasse*. Abzählbare unendliche Ordinalzahlen nennen wir *Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse*. Jenseits der Ordinalzahlen von höchstens der ersten Zahlenklasse befindet sich die kleinste Ordinalzahl der zweiten Zahlenklasse, die Kardinalzahl $\aleph_0$ $(= \omega)$. Jenseits der Ordinalzahlen von höchstens der zweiten Zahlenklasse befindet sich die kleinste *Ordinalzahl der dritten Zahlenklasse*, die Kardinalzahl $\aleph_1$. Danach kommen $\aleph_2$, $\aleph_3, \ldots$, $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}, \ldots$

Ordinalitäten und Kardinalitäten

Jede Teilmengen von Ordinalzahlen besitzt ein kleinstes Element. Mengen mit dieser Eigenschaft nennen wir *wohlgeordnet*. Zum Beispiel ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ wohlgeordnet.

Aber auch die Menge der ganzen Zahlen kann wohlgeordnet werden:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$$

Allgemein gilt: Jede Menge (auch eine überabzählbare Menge!) kann wohlgeordnet werden.[30]

[30] Es handelt sich bei dieser Aussage um den Wohlordnungssatz. Dieser Satz ist beweistechnisch äquivalent zur Kontinuumshypothese und somit in der heute üblichen Mengenlehre weder beweisbar noch widerlegbar. In einer Mengenlehre, in der die Kontinuumshypothese gilt, gilt auch der Wohlordnungssatz. Wegen dem Wohlordnungssatz kann es übrigens keine Mengen geben, deren Mächtigkeit „zwischen“ den endlichen Mengen und der Menge der natürlichen Zahlen liegt. Wäre dem nämlich so, könnte diese Menge aufgrund des Wohlordnungssatzes wohlgeordnet werden und besäße damit eine Ordinalität die größer ist als alle endlichen Ordinalzahlen, aber kleiner als ω. Eine solche Ordinalzahl gibt es aber nicht, da ω gemäß Konstruktion/Definition die kleinste Ordinalzahl jenseits der endlichen Ordinalzahlen ist.

Wir nennen zwei geordnete Mengen A und B ähnlich, und schreiben $|A| = |B|$, wenn es eine vollständige, ordnungserhaltende[31] Paarbildung zwischen den Elementen von A und B gibt. Es gilt: Zu jeder wohlgeordneten Menge M gibt es genau eine ähnliche Ordinalzahl. Wir schreiben $|M| = m$ und nennen m die Ordinalzahl oder Ordinalität der geordneten Menge M. Zum Beispiel gelten mit den im vorangehenden Absatz dargestellten Ordnungen $|\mathbb{N}_0| = \omega$ und $|\mathbb{Z}| = 2\omega$.

Wir nennen zwei Mengen A und B äquivalent (oder gleichmächtig), und schreiben $||A|| = ||B||$, wenn es eine vollständige Paarbildung zwischen den Elementen von A und B gibt. Es gilt: Zu jeder Menge M gibt es genau eine äquivalente (bzw. gleichmächtige) Kardinalzahl. Wir schreiben $||M|| = m$ und nennen m die Kardinalzahl oder Kardinalität der Menge M.

Zusammenfassung

Mit den vorangehenden Definitionen und Vereinbarungen haben wir ein von endlichen Mengen bekanntes Prinzip auf zwei verschiedene Arten auf unendliche Mengen verallgemeinert:

(1) Die Mächtigkeit bzw. Kardinalität einer Menge M lässt sich nun durch eine eindeutig bestimmte Kardinalzahlen ausdrücken. Der Vergleich der Mächtigkeiten zweier Mengen erfolgt über den Vergleich der Kardinalzahlen.

(2) Die Ordinalität[32] einer wohlgeordneten Menge M lässt sich nun durch eine eindeutig bestimmte Ordinalzahl

[31] Sind a_1, a_2 zwei Elemente der Menge A mit $a_1 < a_2$ und b_1, b_2 die zugeordneten Partner aus der Menge B, dann gilt $b_1 < b_2$.

[32] Bei endlichen Mengen erfolgt in der Regel keine Unterscheidung zwischen Kardinalität und Ordinalität, da hier beide Konzepte zusammenfallen - Endliche Mengen sind stets wohlgeordnet. Die Wohlordnung endlicher Mengen ist eindeutig.

ausdrücken. Der Vergleich der Ordinalitäten zweier wohlgeordneten Mengen erfolgt über den Vergleich der Ordinalzahlen.

Es lassen sich nun auf den Ordinalzahlen bzw. Kardinalzahlen Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation und Potenzierung definieren und somit die Rechengesetze der natürlichen Zahlen über das Endliche hinaus verallgemeinern. Anschließend lassen sich auf der Grundlage dieser Rechenoperationen die meisten Beweise der vorangehenden Kapitel sehr einfach rein arithmetisch führen.

Um den Rahmen dieses Buches nicht zu sprengen, muss an dieser Stelle ein kleines Beispiel genügen: Die Menge $\mathbb{N}^*$ besitzt die Kardinalität $\aleph_0 + \aleph_0^2 + \aleph_0^3 + \aleph_0^4 + \ldots$ Wir wissen bereits, dass gilt $\aleph_0^2 = \aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$. Somit gilt unter anderem auch $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 * \aleph_0 = (\aleph_0 * \aleph_0) * \aleph_0 = \aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$. Dann gilt aber $||\mathbb{N}^*|| = \aleph_0 + \aleph_0^2 + \aleph_0^3 + \aleph_0^4 + \ldots = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots = \aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$.

KAPITEL 14

Gibt es eine größte Menge?

In Kapitel 12 haben wir erfahren, dass es beliebig mächtige Mengen gibt. Es stellt sich zwangsläufig die Frage nach der Existenz einer größten Menge.

Die größte Menge ist offensichtlich die *Menge aller Dinge* ALL_D, da keine Menge mehr Dinge enthalten kann, als diese Menge. In dieser Menge ist die *Menge aller Mengen* ALL_M enthalten. Es gilt also $||ALL_M|| \leq ||ALL_D||$. Offensichtlich gibt es aber zu jedem Ding x der Menge ALL_D die Menge $\{x\}$ in der Menge ALL_M. Damit ist die Menge ALL_D gleichmächtig zu einer Teilmenge der Menge ALL_M. Es gilt somit auch $||ALL_D|| \leq ||ALL_M||$ und daher $||ALL_M|| = ||ALL_D||$.[33]

Widersprüchlichkeit der Menge aller Mengen

Im Gegensatz zu allen bisher betrachteten Mengen, würde sich die Menge ALL_M, wir bezeichnen diese im Folgenden nur noch mit ALL, selbst enthalten. Prinzipiell spricht nichts gegen die Existenz einer solchen Menge, da zum Beispiel ein Mengenmodell mit ausschließlich den Mengen $A = \emptyset$ und $B = \{A, B\}$ eine ALL-Menge besitzen würde. Aber gibt es die ALL-Menge bzw. die ALL_D-Menge auch in unserer Mengenlehre?

Angenommen es gäbe diese Mengen, dann ...

(1) ... gäbe es auch die Menge $P(ALL)$. Diese Menge besäße eine größere Mächtigkeit als ALL, obwohl es sich

[33] Sei $CARD$ die Menge aller Kardinalzahlen und ORD die Menge aller Ordinalzahlen, dann gilt: $||ALL_M|| = ||CARD|| = ||ORD||$ (ohne Beweis).

bei ALL um die größtmögliche Menge handelt. Widerspruch.

(2) ... gäbe es auch die Menge aller Ordinalzahlen O. Gemäß Definition der Ordinalzahlen gäbe es dann eine Ordinalzahl, die größer als alle Ordinalzahlen ist. Widerspruch.[34]

(3) ... gäbe es auch die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten: $R = \{M \in ALL : M \notin M\}$ (auch Russelsche Menge genannt). Es stellt sich nun die Frage, ob R sich selbst enthält oder nicht: Angenommen R enthält sich selbst, so muss R der Bedingung für das Enthaltensein in R genügen, R darf sich demnach nicht selbst enthalten. Widerspruch. Also enthält R sich nicht selbst. Dann genügt R aber der Bedingung für das Enthaltensein in R und ist somit in R enthalten. Widerspruch. Somit gilt weder $R \in R$ noch $R \notin R$. Widerspruch. (Die Russelsche Menge ist eine Diagonalisierung gegen sämtliche Mengen und somit eine weitere Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens.)

(4) ... gäbe es die Menge aller Mengen endlicher Tiefe: Sei M eine beliebige Menge. Ein *Abstieg von M* ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Mengen M_0, M_1, M_2, M_3, ... mit $M_0 = M$, und $M_{i+1} \in M_i$. Die Menge M besitzt eine endliche Tiefe, wenn alle möglichen Abstiege endlich sind, jeder Abstieg also zwangsläufig nach endlich vielen Schritten in der leeren Menge $\emptyset$ endet. Die

[34]Diese Betrachtung zeigt, dass die Existenz überabzählbarer Ordinalzahlen nicht mit der Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen bewiesen werden kann, da, falls es nur abzählbare Ordinalzahlen gibt, die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen identisch mit der widersprüchlichen Menge aller Ordinalzahlen ist. Der Beweis des vorangehenden Kapitels ist somit ungültig bzw. zeigt lediglich die Korrektheit der offensichtlich richtige Behauptung „Wenn es überabzählbare Ordinalzahlen gibt, dann folgt die kleinste direkt auf die abzählbaren Ordinalzahlen.“ Überabzählbare Ordinalzahlen gibt es dennoch. Es ist lediglich ein anderer Beweis nötig, der auf den Wohlordnungssatz zurückgreift und auf den wir an dieser Stelle verzichten müssen.

Menge aller Mengen endlicher Tiefe nennen wir Zwickersche Menge und bezeichnen diese mit Z. Es stellt sich nun die Frage, ob Z selbst eine Menge endlicher Tiefe ist: Jeder Abstieg von Z beginnt mit der Menge Z. Anschließend folgt eine Menge aus Z. Da Z ausschließlich Mengen endlicher Tiefe enthält, sind die Abstiege endlich und lediglich einen Schritt länger, als die Abstiege der in Z enthaltenen Mengen. Damit ist Z eine Menge endlicher Tiefe. Dann gilt aber $Z \in Z$. Folglich gibt es einen Abstieg $Z \to Z \to Z \to \ldots$ und Z ist doch keine Menge endlicher Tiefe. Widerspruch.

Interpretation des Widerspruchs

Damit führt die Annahme der Existenz der ALL-Menge zu Widersprüchen. Was haben wir also falsch gemacht? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir dieses Ergebnis interpretieren. Dabei müssen wir jedoch streng zwischen Mengenmodellen (konkrete gedankliche Ausprägungen einer Mengentheorie) und Mengentheorien (Bauplan eines Mengenmodells) unterscheiden:

(1) Jedes Mengenmodell ist unvollständig, da es einige intuitiv gültige Mengen, wie $P(ALL)$, R oder Z nicht enthält. Zu jedem Mengenmodell M gibt es ein Mengenmodell M', das alle Mengen aus M und noch einige mehr enthält. M entpuppt sich bei der Betrachtung aus M' heraus als unvollständig.

(2) Jede Mengentheorie, die die Existenz von $P(ALL)$, R oder Z erzwingt ist widersprüchlich.[35]

(3) Jede widerspruchsfreie Mengentheorie, ist unvollständig derart, dass die Existenz intuitiv gültiger Mengen wie

[35] Damit ist unsere naive Mengenlehre widersprüchlich: Wir erlauben die Menge aller Mengen und gleichzeitig die Potenzmenge jeder beliebigen Menge.

$P(ALL)$, R oder Z nicht gesichert (ggf. sogar verboten) wird.

Wegen der Existenz der Potenzmenge $P(M)$ zu jeder Menge M, gibt es keine größte gesicherte Mächtigkeitsstufe. Jenseits der gesicherten Mächtigkeitsstufen, gibt es gemäß Punkt (3) stets auch ungesicherte Mächtigkeitsstufen und darunter stets auch eine kleinste ungesicherte: Sei Φ eine Sammlung von Mengenkonstruktionen, also eine Sammlung von Verfahren zur Konstruktion immer größerer Mengen und sei ALL_M die Menge aller damit konstruierbaren Mengen (= Schnitt aller möglichen Mengenmodelle). Dann sind $P(ALL_M)$, $P(P(ALL_M))$, ... noch größere Mengen, die durch Φ nicht konstruiert bzw. deren Existenz nicht garantiert werden können. Φ ist unvollständig und damit auch jede Mengentheorie, die nur die Mengenkonstruktionen aus Φ sichert.

Hinreichend ausdrucksstarke, widerspruchsfreie Theorien sind nicht vollständig formalisierbar.

Diese Unvollständigkeit hat nichts mit dem Ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz zu tun, der sich mit der Nichtbeweisbarkeit von Aussagen in axiomatisierbaren (und somit formalisierbaren) Theorien beschäftigt: Gödel zeigte mit seinem Vollständigkeitssatz, dass für die Prädikatenlogik 1. Stufe (PL/1) ein vollständigen Beweißkalkül existiert und somit sämtliche wahre Aussagen auch beweisbar sind. Dagegen zeigte sein erster Unvollständigkeitssatz, dass es für die Prädikatenlogik 2. Stufe (PL/2) kein solches Beweißkalkül geben kann und somit für die betreffenden, in der PL/2 formalisierbaren, Theorien zwangsläufig unbeweisbare wahre Aussagen existieren.

Jeder Gesamtheit von Mengenkonstruktionen ist unvollständig, da es von außen betrachtet nicht konstruierbare Mengen gibt und dies eine mögliche Erweiterung der Mengenkonstruktionsverfahren erkennen lässt. Die Untersuchungen zur Kontinuumshypothese haben gezeigt, dass es auch ungesicherte Mächtigkeitsstufen zwischen den gesicherten Mächtigkeitsstufen geben kann. Diese sind hier aber nicht gemeint, machen aber auf weitere Unvollständigkeiten aufmerksam.

Mit *hinreichend ausdrucksstark* ist u.a. eine die Mengenlehre enthaltende Theorie gemeint. Es gibt scheinbar auch deutlich einfachere Theorien, wie z.B. die Theorie der Ordinalzahlen (mit ausschließlich der Relation „$\leq$“, also ohne Addition, Multiplikation, Potenzierung). Hier muss man sich allerdings bewusst machen, dass diese Theorie in ihren Axiomen auf sämtliche Mengenkonstruktionen zurückgreift („Ist M eine Menge von Ordinalzahlen …“) und somit die komplette Mengenlehre beinhaltet. Eine vollständige Axiomatisierung der Theorie der Ordinalzahlen umfasst somit zwangsläufig auch die (unvollständigen) Axiome der Mengenlehre.

Jetzt mal ganz ehrlich: So richtig zufrieden stellend sind die vorangehenden Erklärungen nicht, oder? Wir haben zwar streng bewiesen, dass es die Mengen $P(ALL)$, R, Z, ORD, ... nicht geben kann bzw. nicht geben darf. Dennoch haben wir das intuitive Gefühl, dass diese Mengen sehr wohl als konsistente wohldefinierte Mengen existieren.

Diesem Gefühl haben wir es zu verdanken, dass die entdeckten Widersprüchlichkeiten nicht einfach als Definitionsfehler oder Beweisfehler abgetan werden, sondern als Antinomie der Mengenlehre in die Geschichte der Mathematik eingegangen sind und Anfang des 20. Jh. eine Grundlagenkrise in der Mathematik ausgelöst haben.

Die Antinomie der Mengenlehre ist dabei stark verwandt mit der Antinomie der natürlichen Sprache. Daher wollen wir nun einen kurzen Abstecher in diese „Welt“ unternehmen um zu einem tieferen Verständnis für das Phänomen der Antinomie zu gelangen. Eine vollständige Betrachtung der Antinomien ist an dieser Stelle verständlicher Weise nicht möglich, da diese ein eigenes Buch füllen würde.

Antinomie

Paradoxien sind kontraintuitive Aussagen, also Aussagen die unserer Intuition bzw. unserer naiven Vorstellung widersprechen. Sie treten besonders häufig in realitätsfernen, relativ neuen, unerforschten und ungefestigten Theorien auf. Sie machen uns auf Fehler der zugrunde liegenden Theorie oder unserer Intuition aufmerksam und müssen daher ernst genommen werden.

Logische Paradoxien sind auf einen logischen Widerspruch (weder wahr noch falsch) ausgerichtet und durch eine negierend-zirkelhafte Selbstbezüglichkeit gekennzeichnet. Es handelt sich (in der Regel) um Aussagen, die sich selbst referenzieren, dabei ihren eigenen Wahrheitswert in ihre Bewertung mit einbeziehen und diese Einbeziehung negierender Art ist. Logische Paradoxien werden im Deutschen auch als Antinomien bezeichnet. Im Englischen werden die beiden Begriffe „Paradoxie“ und „Antinomie“ jedoch synonym verwendet werden.

Das tückische an logischen Paradoxien ist, dass das Vorliegen eines zirkelhaften Selbstbezuges unter Umständen gut versteckt wurde, abhängig vom Beobachtungsstandort ist oder aber nur unter bestimmten (nicht sofort erkenntlichen) Bedingungen auftritt! Ein und die selbe Aussage kann dann von verschiedenen Standorten aus betrachtet bzw. unter verschiedenen Rahmenbedingungen entweder konsistent oder paradox sein.

Antinomie der Mengenlehre

Wir haben u.a. die Mengen $P(ALL)$, R bzw. Z kennen gelernt und gleichzeitig bewiesen, dass es diese Mengen in der Theorie der Mengenlehre nicht geben kann. Grund hierfür ist der Selbstbezug. Von außerhalb der Theorie der Mengenlehre (der Metaebene aus) betrachtet handelt es sich aber um korrekte Mengen. Der Selbstbezug ist verschwunden.

Antinomie der natürlichen Sprache

Logische Paradoxien der natürlichen Sprache sind auf einen logischen Widerspruch (weder wahr noch falsch) ausgerichtet und durch eine negierende Selbstbezüglichkeit gekennzeichnet. Es handelt sich also (in der Regel) um Aussagen, die sich selbst referenzieren, dabei ihren eigenen Wahrheitswert in ihre Bewertung mit einbeziehen und diese Einbeziehung negierender Art ist. Der Trick hierbei ist, dass der Selbstbezug gut versteckt ist, vom Standort abhängt oder aber nur unter bestimmten (nicht sofort erkenntlichen) Bedingungen auftritt.

Einige Beispiele:

(1) Antinomie des Lügners: Ist der Satz „Diese Aussage ist falsch.“ eine Aussage? Und wenn ja, ist die Aussage wahr oder falsch? Angenommen es handelt sich um eine Aussage, dann ist sie entweder wahr oder falsch. Angenommen sie ist wahr, dann besagt sie etwas Wahres und ist somit falsch. Widerspruch. Somit ist sie falsch. Dann trifft aber genau das besagte zu, weshalb sie zwangsläufig wahr ist. Widerspruch. Somit ist sie weder wahr noch falsch und daher keine Aussage. [Dann ist sie aber auch keine falsche Aussage. Somit besagt sie etwas Falsches, ist damit falsch und somit doch eine Aussage. Widerspruch.]

(2) Wir definieren die Eigenschaft heterologisch wie folgt: „Eine beliebige Eigenschaft ist heterologisch, genau dann wenn sie sich selbst nicht bezeichnet, andernfalls ist sie homologisch.“ So ist unter anderem „einsilbig“ heterologisch, während „dreisilbig“ oder „abstrakt“ homologisch sind. Es stellt sich nun die Frage, ob „heterologisch“ heterologisch ist. Die Eigenschaft „heterologisch“ ist heterologisch genau dann wenn sie sich selbst nicht bezeichnet, also nicht heterologisch ist. Widerspruch.

(Es stellt sich nun die Frage, ob „homologisch“ homologisch ist. „Homologisch“ ist homologisch genau dann wenn sie sich selbst bezeichnet, also homologisch ist. Somit können wir uns hier frei entscheiden.)

(3) Richardsche Antinomie / Berrysche Antinomie: Natürliche Zahlen lassen sich in Worten einer beliebigen Sprache eindeutig beschreiben. Solche Beschreibungen nennt man Schriftnamen natürlicher Zahlen. Die Schriftnamen „Zwei“ oder „Gerade Primzahl“ oder „Größter gemeinsamer Teiler von 4 und 6“ bezeichnen offensichtlich eindeutig die natürliche Zahl „2“. Wir bilden nun die Richardsche Menge $R :=$ „Menge aller mit weniger als 1000 Zeichen definierbaren natürlichen Zahlen“. Diese Menge ist offensichtlich existent, endlich und nicht leer. Es ist sogar möglich diese Menge zu konstruieren, indem alle in Frage kommenden Zeichenketten (nur endlich viele) hinsichtlich der Eignung als gültiger Schriftname überprüft werden.

Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, muss es somit auch welche geben, die nicht in der Menge R enthalten sind. Da jede Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt, muss es somit eine kleinste natürliche Zahl geben, die nicht in R enthalten ist. Es gibt also eine kleinste natürliche Zahl deren sämtliche Schriftnamen aus mindestens 1000 Zeichen bestehen. Somit müsste es sich bei $r :=$ „Kleinste natürliche Zahl deren sämtliche Schriftnahmen jeweils aus mindestens 1000 Zeichen bestehen.“ um einen gültigen Schriftnamen handeln. Wenn es sich aber um einen gültigen Schriftnamen handelt, so muss es eine durch diese Beschreibung eindeutig bestimmte natürliche Zahl n geben. Aufgrund dieser Beschreibung gilt $n \notin R$. Da r aber offensichtlich aus weniger als 1000 Zeichen besteht, gilt auch $n \in R$. Widerspruch.

(4) Barbier: Es war einmal ein kleines Dorf in dem nur ein einziger Barbier tätig war. Dieser Dorfbarbier rasierte alle Personen dieses Dorfes, die sich nicht selbst rasieren. Da der Barbier selbst eine Person dieses Dorfes ist, stellt sich nun die Frage, ob er sich selbst rasiert oder nicht. Angenommen er rasiert sich selbst, dann wird er somit nicht vom Barbier rasiert und rasiert sich somit nicht selbst. Widerspruch. Wenn er sich aber nicht selbst rasiert, wird er somit vom Barbier rasiert und rasiert sich somit doch selbst. Widerspruch.

(5) Handlungsanweisung:

   (a) Auf einem Schild steht: „Dieses Hinweisschild bitte nicht beachten."

   (b) Ein Fremder rät: „Nehmen Sie nie einen Rat von Fremden an!"

   (c) Eine Mutter fordert ihre Tochter auf: „Sei doch mal spontan."

   (d) An der Kasse eines Einkaufszentrums steht geschrieben: „Bitte zeigen Sie ihre Rabattkarte unaufgefordert vor."

Es lebe die Menge aller Mengen

Die heute übliche Axiomatisierung der Mengenlehre verbietet sämtliche direkten oder indirekten Selbstbezüglichkeiten von Mengen. Mengen dürfen sich somit niemals selbst enthalten. Eine Menge M darf auch keine Mengen enthalten, die Mengen enthalten, ... die M enthalten. Damit gibt es auch keine Menge aller Mengen ALL und damit auch keine Mengen $P(ALL)$, R, Z, ...

Es gibt jedoch auch Mengentheorien in denen selbstbezügliche Mengen inkl. der Menge aller Mengen zulässig sind. Dazu brauchen wir uns Mengen lediglich als ungeordnete Listen vorstellen. Diese Listen enthalten keine Elemente/Mengen, sondern ausschließlich Referenzen (Zeiger, Pointer) auf Mengen. In dieser *Welt der Referenzmengen* gibt es Mengen, die nur sich selbst enthalten, es gibt die Menge aller Mengen und es gibt sogar die Menge aller Mengen, die sich selbst enthalten. Die Mengen $P(ALL)$, R und Z gibt es allerdings auch hier nicht. Außerdem haben wir das Phänomen, dass es Mengen gibt, die gleich scheinen aber nicht gleich sind. So scheinen die vier Mengen $A = \{A\}$, $B = \{B\}$, $C = \{A\}$, $D = \{A, B, C\}$ gleich, sind aber verschieden.

Auch in der *Welt der Turingmengen* gibt es die Menge ALL. Mengen werden hierbei durch Turingmaschinen repräsentiert. Diese Turingmaschinen sind in der Lage den Quellcode von Turingmaschinen (=Mengenrepräsentationen) aufzuzählen bzw. zu akzeptieren. Eine Turingmaschine, die nichts aufzählt bzw. akzeptiert, ist ein Repräsentant für die leere Menge. Eine Turingmaschine, die alle syntaktisch korrekten Quellcodes von Turingmaschinen aufzählt, ist ein Repräsentant für die ALL-Menge. In dieser Welt gibt nun tatsächlich eine Turingmaschine für die Menge $R = \{M : M \in M\}$. Diese Turingmaschine prüft, ob es sich bei der Eingabe um einen syntaktisch korrekten Quellcode einer Turingmaschine handelt. Wenn ja, wird diese Turingmaschine mit seinem eigenen Quellcode als Eingabe simuliert. Ist diese Simulation erfolgreich und die Eingabe wird durch die simulierte Turingmaschine akzeptiert, so akzeptiert auch die Turingmaschine R ihre Eingabe. Offensichtlich gilt $R \notin R$, da die Turingmaschine R aufgrund der Simulation in der Simulation in der Simulation ... niemals terminiert. Ob es einen alternativen Repräsentanten für R gibt, für den $R \in R$ gilt, muss an dieser Stelle, wie viele andere Fragen auch, offen bleiben.

KAPITEL 15

Wie „breit“ ist ein einzelner Punkt?

Zum Abschluss wollen wir uns noch dem aktual unendlich Kleinen zuwenden: Dazu betrachten wir einen einzelnen isolierten Punkt P und stellen die Frage nach dem Durchmesser p dieses Punktes.

Offensichtlich gilt $p \geq 0$, da negative Zahlen in diesem Zusammenhang keinen Sinn machen.

Die Zahl p ist kleiner als jede endliche reelle Zahl: Es sei s eine Gerade der Länge k mit $k \in \mathbb{R}$ und $k > 0$. Wir positionieren die Gerade s nun als Schirmchen über den Punkt P. Da s aus unendlich vielen Punkten besteht, wird P durch s vollständig überdeckt. Somit kann P höchstens so breit wie s sein, es gilt also $p \leq k$. Da s und somit k beliebig klein gewählt werden kann, ist p kleiner als jede positive reelle Zahl größer 0.

Die Zahl p ist verschieden von 0: Hätten wir nicht nur einen Punkt P, sondern eine Punktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums und würden diese Punkte lückenlos nebeneinander aufreihen, so erhielten wir eine Gerade. Diese Gerade kann endlich, abzählbar unendlich und sogar überabzählbar unendlich lang sein.[36] Sei c die Kardinalzahl mit $||\mathbb{R}|| = c$, dann gilt *unter anderem* $p * c = 1$. Damit gilt aber $p \neq 0$, da 0 multipliziert mit einer beliebigen (transfiniten) Zahl stets 0 ergibt.

[36] Die Länge ist nicht nur von der Ordnung der Punkte abhängig, da Geraden ohne Umordnung der Punkte gestreckt oder gestaucht werden können. Es ist auf der Grundlage der hier durchgeführten Untersuchungen auch nicht auszuschließen, dass die Gerade aktual unendlich kurz sein kann.

Damit ist p eine aktual unendlich kleine Zahl: Sie ist größer als 0, aber kleiner als jede endliche reelle Zahl.

Es stellt sich nun die Frage nach der Breite einer Punktmenge P bestehend aus abzählbar unendlich vielen Punkten: Es sei s eine Gerade der Länge k mit $k \in \mathbb{R}$ und $k > 0$. Wir zerlegen die Gerade s nun analog zum Beweis der Überabzählbarkeit des geometrischen Kontinuums aus Kapitel 11 in abzählbar unendlich viele Schirmchen und positionieren diese einzeln über die abzählbar unendlich vielen Punkte der Menge P.[37] Da alle Schirmchen s_i aus unendlich vielen Punkten bestehen, werden die abzählbar unendlich vielen Punkte aus P durch die Schirmchen vollständig überdeckt. Somit können die Punkte aus P in der Summe höchstens so breit wie s sein. Da s und somit k beliebig klein gewählt werden kann, ist die Breite von P kleiner als jede positive reelle Zahl größer 0. Sei ω die Kardinalzahl mit $||\mathbb{N}|| = \omega$, dann ist folglich $p * \omega$ stets aktual unendlich klein.

[37] Die Summe überabzählbar vieler, aktual unendlich kleiner Zahlen ist sowohl endlich als auch unendlich. Daher ist der Schirmchenbeweis aus Kapitel 11 für überabzählbar viele Schirmchen der Breite p nicht zulässig.

Sind die Unendlichkeitsuntersuchungen abgeschlossen?

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

die Unendlichkeit ist eines der faszinierendsten Konzepte der Mathematik: Sie ist in der Natur nicht anzutreffen und somit eine reine Erfindung des menschlichen Geistes. Dabei sind die Untersuchungen der Unendlichkeit keineswegs nutzlos, vielmehr lassen sich viele natürliche Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Unendlichkeit sehr einfacher mathematisch beschreiben. Hinzu kommt, dass die Unendlichkeit eine sehr leicht verständliche Theorie sein kann, sofern man bereit ist, sich auf eine jeder Erfahrung widersprechende Theorie einzulassen.

Die Unendlichkeit ist aber auch eines der schwierigsten Konzepte der Mathematik: Resultate der Unendlichkeitslehre können nicht durch Vergleich mit der Realität verifiziert werden. Hinzu kommt, dass sie oft paradox erscheinen und unserer Intuition widersprechen. Auch ist zu bedenken, dass wir im Zusammenhang mit der Unendlichkeit mit vielen neuen, in anderen Theorien vollkommen unbekannten, Problemen konfrontiert werden - Hier sei stellvertretend das Aninomieproblem genannt. Der wichtigste Grund für die Schwierigkeiten mit der Unendlichkeit ist jedoch die Tatsache, dass wir mit der Unendlichkeit die Grenze des geistigen Vorstellungsvermögens erreichen.

Es gibt heutzutage viele Untersuchungen zur Unendlichkeit. Diese Untersuchungen beschränken sich allerdings weitestgehend in der Theoretischen Informatik auf $\omega-$Wörter[38] und in der Mathematik auf Ordinal- und Kardinalzahlen. Dabei steckt in der Unendlichkeit noch viel ungenutztes Potential:

(1) Die Antinomie der Mengenlehre wurden durch einen stufenweisen Aufbau der Mengen beseitigt. Dadurch können Mengen niemals sich selbst enthalten. Mit dieser willkürlichen Einschränkung wurde die Möglichkeit der mathematischen Untersuchung des Phänomens der Selbstbezüglichkeit und der Übertragung der Ergebnisse diese Untersuchungen auf andere Probleme, wie z.B. der Antinomie der natürlichen Sprache, vertan.

(2) Faszination und Einfachheit werden in der Unendlichkeitslehre auf eine Weise vereint, die in keiner anderen Theorie zu finden ist. Daher ist das Konzept der Unendlichkeit ideal geeignet, das Interesse von Schülern an der Mathematik zu wecken. Aber anstatt von dieser Möglichkeit Gebrauch zu machen, werden die potentiellen Professoren und Nobelpreisträger mit Algebra, Analysis und Stochastik „gequält“.

(3) Es wird davon ausgegangen, dass Georg Cantor alle Grundlagen der Unendlichkeitslehre geschaffen hat und jedes weitere Resultat lediglich eine Nachbesserung bzw. Ergänzung darstellt. Aus diesem Grund ist die Grundlagenforschung der Unendlichkeitslehre, abgesehen von kleineren Ausnahmen, abgeschlossen. Die Beweise zur Überabzählbarkeit des geometrischen Kontinuums und zur Existenz aktual unendlich kleiner Größen sowie die Entdeckung der Zwickerschen Menge zeigen jedoch, dass hier ein Irrtum vorliegt.

[38] $\omega-$Wörter sind unendlich lange Wörter über einem endlichen Alphabet.

Ich habe die Hoffnung, dass das wahre Potential der Unendlichkeitslehre irgendwann erkannt und genutzt wird. Möge dieses Buch seinen Betrag dazu leisten.

Mit freundlichem Gruß

Peter Weigel

Welche Quellen dienten als Grundlage dieses Buches?

Ein Großteil der in diesem Buch vorgestellten Ideen oder Beweise wurde (ggf. mit geringfügigen Abänderungen) anderen Literaturquellen entnommen. Diese Quellen werden im Folgenden kurz vorgestellt. Leider konnten nicht alle Quellen ausfindig gemacht bzw. bis zu ihrem Ursprung zurückverfolgt werden. Daher kann keine Garantie auf Vollständigkeit und Richtigkeit übernommen werden.

Kapitel 2

Die Divergenz unendlicher Summen mit konstanten oder monoton wachsenden Gliedern ist allgemein bekannt und entspricht der allgemeinen Erfahrung.

Dass auch unendliche Summen mit monoton fallenden Gliedern divergieren können, ist unter Berücksichtigung der folgenden Untersuchungen desselben Kapitels keineswegs selbstverständlich. Wer diese Divergenz wann erstmals entdeckte, lässt sich heute leider nicht mehr rekonstruieren.

Die Geschichte des *Fliegenden Pfeils* entspricht inhaltlich (aber nicht wortwörtlich) einer der drei *Zenonschen Paradoxien*, wobei die paradoxe Deutung weggelassen wurde. Die Idee der fortwährenden Teilung eines Seils ist eine Abwandlung dieser Paradoxie. Die Entdeckung der Konvergenz unendlicher Summen mit monoton fallenden Gliedern lässt sich somit bis *Zenon von Elea* zurückverfolgen. Ob er auch der Entdecker ist, ist fraglich. Zumal *Zenon von Elea* diese mathematische Tatsache als

Paradoxon deutete und somit deren wahre Bedeutung nicht erkannte.

Die Abschließenden beiden Geschichten zum *Fliegenden Pfeil* und zu *Achill und der Schildkröte* entsprechen inhaltlich (aber nicht wortwörtlich) den beiden anderen *Zenonschen Paradoxien.*

Kapitel 3

Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn es eine vollständige Paarbildung der Elemente von A mit den Elementen von B gibt. Diese Definition der Gleichmächtigkeit bildet die Grundlage der Mächtigkeitsuntersuchungen und geht auf *Galileo Galilei* zurück ([**Ga38**]). Die Tatsache, dass eine unendliche Menge gleichmächtig zu einer echten Teilmenge sein kann, deutete er jedoch als Paradoxon und als Beleg dafür, dass sich unendliche Mengen hinsichtlich ihrer Größe nicht sinnvoll vergleichen lassen. Erst *Georg Cantor* löste dieses Paradoxon auf. Heute wird dieses Phänomen als charakteristische Eigenschaft unendlicher Mengen angesehen.

Georg Cantor benutzte häufig den auch von uns verwendeten Äquivalenzsatz

$$||A|| \leq ||B|| \wedge ||A|| \geq ||B|| \iff ||A|| = ||B||$$

Er lieferte jedoch nie einen Beweis. Heute existieren mehrere gültige Beweise von Dedekind, Bernstein oder Schröder.

Eine Ursache für die Schwierigkeiten bei der Untersuchung der Unendlichkeit war das Fehlen einer Theorie innerhalb der sich die Unendlichkeit mathematisch sauber untersuchen lässt. *Georg Cantor* entwickelte dazu die *Mengenlehre*, eine Theorie die sich später, auch über die Unendlichkeitsuntersuchungen hinaus, als äußerst nützlich erweisen sollte. Die in Kapitel 3 aufgeführte Definition der Menge stammt von *Georg Cantor*

([**Ca95**]). Man beachte jedoch, dass diese *cantorsche (naive) Mengenlehre* und somit auch die *cantorsche Definition der Mengen* zu Antinomien führt und somit für exakte mathematische Untersuchungen nicht verwendet werden darf. Für die Zwecke dieses Buches ist die *naive Mengenlehre* jedoch ausreichend.

Die Axiome der natürlichen Zahlen gehen auf Peano ([**Pe89**]) und Dedekind ([**De88**]) zurück und bilden eine der wichtigsten Theorien der Mathematik.

Die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_1$ kann als allgemein bekannt angenommen werden, die Ermittlung eines Urhebers ist also nicht nötig. Ob die Geschichte des Schäfers auf *Galileo Galilei* zurückgeht ist unbekannt. Im Gegensatz dazu kann die Geschichte des *unendlichen Hotels* bis zu *David Hilbert* zurückverfolgt werden.

Die Idee der Verbindung von ∞ mit *viele* stammt aus dem Buch [**Ki07**]. Auch wenn dort von Eingeborenenstämmen des Urwalds die Rede ist, habe ich diese Form der Arithmetik eher mit der Kleinkindmathematik assoziiert und daher entsprechend abgewandelt.

Kapitel 4

Die Entdeckung, dass sich die Mächtigkeit einer unendlichen Menge durch Entfernung unendlich vieler Elemente (Übergang von der Menge der *natürlichen Zahlen* zur Menge der *Quadratzahlen*) unter Umständen nicht ändert, ist *Galileo Galilei* zu verdanken ([**Ga38**]).

Die Geschichte des unendlichen Hotels ist eine Fortsetzung der im Kapitel 3 begonnenen Geschichte und geht (inhaltlich) auf *David Hilbert* zurück. Die Geschichte vom *alten Mann und* *dem Teufel* wurde dem Buch [**Sm93**] von Raymond M. Smullyan entlehnt.

Die Definition der Abzählbarkeit geht auf Georg Cantor zurück und erlangte erst durch den Beweis der Existenz des Überabzählbaren an Relevanz.

Kapitel 5

Die Abzählung der *rationalen Zahlen* und somit die Abzählung unendlich mal unendlich vieler Dinge geht auf *Georg Cantor* ([**Ca74**]) zurück. Die hier vorgestellte Variante ist eine Abwandlung des als *Erstes Cantorsche Diagonalverfahren* bekannte Abzählungsverfahrens (Abzählung über Maximum statt Summe).

Die Geschichte des unendlichen Hotels ist eine Fortsetzung der im Kapitel 3 begonnenen Geschichte und geht (inhaltlich) auf *David Hilbert* zurück.

Kapitel 6

Die Abzählung der *universellen Sprache* ist eine Abwandlung des Beweises von *Georg Cantor* zur Abzählung der *algebraischen Zahlen* ([**Ca74**]).

Die Abzählung einer beliebigen „normalen“ Sprache und somit die Abzählung von Mengen, deren sämtliche Elemente namenhaft sind, ist eine logische Weiterentwicklung dieser Erkenntnis.

Kapitel 7

Der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ lässt sich bis in die Zeit von *Pythagoras* zurückverfolgen. Ob er als Entdecker dieses Beweises angesehen werden kann, ist jedoch unbekannt.

Die Verbindung zwischen dem *geometrischen Kontinuum* und der Menge der *reellen Zahlen* als *arithmetischen Kontinuum* ist eine logische Konsequenz der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Bis zur Entdeckung *irrationaler Zahlen* betrachtete man die *rationalen Zahlen* als ausreichend.

Allerdings identifizierte man bereits in der Antike das arithmetische Kontinuum mit den reellen Zahlen. Man ging jedoch davon aus, dass jede reelle Zahl rational ist, es also keine irrationalen Zahlen gibt. Denn auch wenn man mit den *reellen Zahlen* schon im antiken Griechenland operierte, entwickelte erstmals *Georg Cantor* eine exakt mathematische Definition. Auf diese Definition mittels Fundamentalreihen geht übrigens die heutige Dezimalbruchentwicklung zurück.

Kapitel 8

Der arithmetische Beweis der Gleichmächtigkeit verschieden langer endlicher Geraden geht auf *Bernhard Bolzano* zurück ([**Bo51**]). Die geometrische Interpretation dieses Beweises liefert den geometrischen Beweis mittels Projektion. Der Urheber des geometrischen Beweises durch Anwendung der Strahlensätze ist unbekannt, im Zweifelsfall bin ich der Urheber ;-)

Man beachte auch, dass die Möglichkeit der Streckung und Stauchung von Geraden bereits lange vor *Bernhard Bolzano* bekannt war. Jedoch wurde diese Tatsache nie unter dem Gesichtspunkt der Punktgleichmächtigkeit betrachtet.

Kapitel 9

Der geometrische Beweis der Gleichmächtigkeit einer endlich ausgedehnten Ebene (Kugeloberfläche) und einer unendlich ausgedehnten Ebene lässt sich bis zu *Bernhard Riemann* zurückverfolgen. Die in Beweis (3) vorgestellte Variante habe ich aus dem Buch [**Ki07**] übernommen.

Die beiden arithmetischen Beweise (1) und (2) sind logische Weiterentwicklungen des Beweises von *Bernhard Bolzano*.

Beweis (4) stammt von mir, kann jedoch aufgrund seiner Einfachheit als allgemein bekannt angenommen werden. Gleiches gilt für die beiden Beweise zu unendlich vielen unendlichen Geraden.

Kapitel 10

Der arithmetische Beweis der Gleichmächtigkeit von Flächen verschiedener Dimensionen (Eine Fläche der Dimension 0 ist ein Punkt. Eine Fläche der Dimension 1 ist eine Gerade. Eine Fläche der Dimension 2 ist eine Ebene. Eine Fläche der Dimension 3 ist ein dreidimensionaler Raum. ...) geht auf *Georg Cantor* zurück ([**Ca78**]).

Einen gültigen Beweis für die Nichtexistenz eines entsprechenden geometrischen Beweises lieferte erstmals L. E. I. Brouwer in [**Br11**].[39]

Urheber des Beweises zur Mächtigkeit des ∞-dimensionalen Raumes ist Georg Cantor. Grundlage ist die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und somit das Erste Cantorsche Diagonalverfahren.

[39] Hierbei wird angenommen, dass ein geometrischer Beweis nur durch direkte (konstruktive) Angabe einer entsprechenden Abbildung erfolgen kann. Außerdem wird angenommen, dass eine solche Angabe nur für stetige Abbildungen mit höchstens abzählbar unendlich vielen Ausnahmen (Unstetigkeiten) möglich ist.

Es gilt:

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Kapitel 11

In diesem Kapitel wurden drei Beweise zur Überabzählbarkeit des Kontinuums präsentiert:

Beweis 1 belegt die Überabzählbarkeit des *geometrischen Kontinuums*. Die zugrunde liegende Beweisidee, die *Schirmchenidee*, stammt von *Amir D. Aczel* aus dem Buch [**Ac02**]. Man beachte jedoch, dass in dem genannten Buch die Schirmchenidee lediglich zur geometrischen Veranschaulichung des geringen Anteils der rationalen Zahlen an den reellen Zahlen verwendet wird. Dass diese Idee gleichzeitig als Grundlage eines Beweises zur Überabzählbarkeit des *geometrischen Kontinuums* dienen kann, war dem Autor zum damaligen Zeitpunkt anscheinend nicht bewusst. Sämtliche Anwendungen der Schirmchenidee bzw. sämtliche daraus resultierende Folgerungen stammen von mir.

Beweis 2 und 3 belegen die Überabzählbarkeit des *arithmetischen Kontinuums*. Beide Beweise stammen von *Georg Cantor*. Heutzutage wird die Überabzählbarkeit des Kontinuums in der Regel mit dem dritten Beweis, dem *Zweiten Cantorschen Diagonalverfahren*, bewiesen. Der zweite Beweis, der von *Georg Cantor* 16 Jahre vor dem dritten entdeckt wurde, ist dagegen nahezu in Vergessenheit geraten.

Zu Zeiten Georg Cantors, ging es nicht um die Frage, ob die algebraischen Zahlen als arithmetisches Kontinuum ausreichen. Vielmehr definierte man die Menge der reellen Zahlen als arithmetisches Kontinuum und stellte die Frage ob die Menge der reellen Zahlen ungleich der Menge der algebraischen Zahlen ist, es also nicht-algebraische reelle Zahlen gibt. In [**Ca74**] zeigte Georg Cantor die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen, gab einen Beweis zur Überabzählbarkeit der reellen Zahlen an und belegte damit, dass es sehr viele nicht-algebraische, also transzendente, Zahlen geben muss.

Die Geschichte des unendlichen Hotels ist eine Fortsetzung der im Kapitel 3 begonnenen Geschichte und geht (inhaltlich) auf *David Hilbert* zurück.

Kapitel 12

Der dritte Beweis von Kapitel 11 ist in Wahrheit ein Spezialfall eines viel allgemeineren Beweises, der bereits von Georg Cantor entdeckt wurde.

In [**Sm93**] ist ein alternativer Beweis zu finden, der auf Herrn *Zwicker* zurückgeht. Darin wird die *Cantorsche Diagonalmenge* durch eine andere Menge, die *Zwickersche Menge*, ersetzt. Da der Beweis ansonsten identisch ist, wurde er in diesem Buch nicht aufgeführt. Die *Zwickersche Menge* wurde an einer anderen Stelle in dieser Arbeit sinnvoller eingesetzt.

Als Quelle für die Gödelschen Unvollständigkeitssätze diente unter anderem [**Gö31**]. Bezüglich dem Berechenbarkeitsmodell der Turingmaschinen und der Unentscheidbarkeit des Halteproblems sei u.a. auf [**Tu36**] verwiesen.

In Zusammenhang mit der Unendlichkeit gibt es eine Vielzahl interessanter Fragestellungen, die aufgrund ihrer Komplexität in diesem Buch höchstens erwähnt oder sehr oberflächlich behandelt werden können. Für ein tieferes Studium der Themen Äquivalenzsatz, Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz, Kontinuumshypothese, Axiomatisierung der Mengenlehre, etc. sei auf entsprechend andere Literatur bzw. auf Kapitel „Wer hat wann welche Entdeckungen gemacht?“ und „Gibt es noch andere Literatur zum Thema Unendlichkeit?“ verwiesen.

Kapitel 13

Ordinalzahlen repräsentieren Äquivalenzklassen ähnlicher, wohlgeordneter Mengen: Jede Ordinalzahl repräsentiert eine Klasse von zueinander ähnlichen, wohlgeordneten Mengen. Die Mengen einer solchen Klasse lassen sich, wenn man von der Beschaffenheit der Elemente absieht, nicht unterscheiden.

Kardinalzahlen repräsentieren Äquivalenzklassen äquivalenter (=gleichmächtiger) Mengen: Jede Kardinalzahl repräsentiert eine Klasse von zueinander gleichmächtigen Mengen. Die Mengen einer solchen Klasse lassen sich, wenn man von der Beschaffenheit und der Ordnung der Elemente absieht, nicht unterscheiden.

Die Theorie der natürlichen Zahlen, der reellen Zahlen, die Geometrie und viele andere Theorien, eignen sich hervorragend für einen Einstieg in die Untersuchung der Unendlichkeit. Tiefergehende Untersuchungen sind jedoch nur möglich, wenn man sich von allem unnötigen „Ballast“ befreit.

Dies erkannte bereits Georg Cantor. Neben der Schaffung der Grundlagen der Ordinal- und Kardinalzahlarithmetik, zeigte er, dass sich sämtliche von ihm gefundene Resultate zur Mannigfaltigkeitslehre zu Resultaten der Theorie der transfiniten Zahlen verallgemeinern lassen.

Die in diesem Buch angegebene Axiomatisierung der Ordinalzahlen und ist eine Abwandlung der Definition der Wohlordnung nach Georg Cantor. Grund für diese unübliche Axiomatisierung ist die Tatsache, dass mir die üblicherweise verwendeten Axiomatisierungen „1a: Ordinalzahlen repräsentieren Äquivalenzklassen ähnlicher, wohlgeordneter Mengen“, „1b: Die Ordnungstypen von Wohlordnungen heißen Ordinalzahlen.“ bzw „2: Eine Menge α heißt Ordinalzahl, falls eine Wohlordnung $<$ auf α existiert mit: Für alle $\beta \in \alpha$ gilt $\beta = \{\gamma \in \alpha \mid \gamma < \beta\}$.“ nicht gefallen haben bzw. mir zu unanschaulich erschienen. Alle drei bzw. vier Axiomatisierungen sind jedoch äquivalent zueinander.

Kapitel 14

Die Mengenlehre wurde von *Georg Cantor* mit dem Ziel der Untersuchung der Unendlichkeit entwickelt. Dass sie sich zu einer der wichtigsten mathematischen Theorien, ja sogar zur Grundlage der gesamten Mathematik, entwickeln würde, war am Anfang nicht abzusehen. Umso schwerwiegender war die Entdeckung der Antinomie der Mengenlehre, also die Entdeckung von scheinbar korrekten, aber dennoch in sich widersprüchlichen Mengen. Diese Antinomie zeigten, dass die *Cantorsche Mengenlehre* Widersprüche enthielt und somit wertlos war, da sich in einer widersprüchlichen Theorie jede Aussage beweisen lässt.

Einige Mengen, wie die Potenzmenge der Menge aller Mengen, die Menge aller Ordinalzahlen oder die Menge aller Kardinalzahlen waren bereits *Georg Cantor* bekannt. Die *Russelsche Menge* wurde dagegen von *Bertrand Russell* und die *Zwickersche Menge* von Herrn *Zwicker* entdeckt.

Es gibt nun u.a. zwei verschiedene Ansätze zur Beseitigung dieser Antinomie:

(1) Am weitesten verbreitet ist die Vorstellung, dass unsere Intuition fehlerhaft ist und somit die Bildung widersprüchlicher Mengen zulässt. Die Beseitigung der Antinomie besteht nun darin, die Mengenbildung einzuschränken und damit die Bildung der antinomischen Mengen zu verhindern bzw. deren Existenz zu verleugnen (ZFC-Mengenlehre, Russelsche Stufentheorie).

(2) Die Alternative zur vorangehenden Lösung ist die Vorstellung, dass es (mindestens) zwei verschiedene Arten

> von Mengen gibt. Neben den ganz normalen (konsistenten) Mengen gibt es virtuelle Mengen, Unmengen, inkonsistente Mengen bzw. absolut unendliche Mengen. Mengen dieser Art sind so groß, dass sie nicht Elemente anderer Mengen sein können (NGB-Mengenlehre), oder dass sie nicht als fertig bzw. vollendet angesehen werden dürfen (Cantorsche Mengenlehre).

Kapitel 14 zeigt, dass alle widerspruchsfreien Mengentheorien zwangsläufig unvollständig sind. Somit können die beiden genannten Ansätze und die daraus resultierenden Mengentheorien nur als Notlösungen angesehen werden. Allgemein gilt: Es gibt keine befriedigende, mathematische Lösung des Antinomieproblems.

Die Erkenntnis, dass es unerreichbare Mächtigkeiten bzw. Kardinalzahlen und somit auch eine kleinste unerreichbare Mächtigkeit bzw. Kardinalzahl geben muss, ist allgemein bekannt. Hier sei auf die Untersuchungen von Ernst Zermelo über Grenzzahlen aus dem Jahre 1930 verwiesen, siehe dazu [**Ze30**].

Um die dahinter liegende Ursache zu identifizieren, haben wir einen kurzen Ausflug zur Antinomie der natürlichen Sprache unternommen. Als Quellen dienten dabei unter anderem [**Br92**], [**Sm93**] und [**He98**].

Die kurz angerissene Idee der „Referenzmengen“ stammt von mir. Dass es Theorien geben kann, in denen die Menge aller Mengen existiert, ist allerdings allgemein bekannt.

Kapitel 15

Das aktual unendlich Kleine hat es nie geschafft seine mathematische Nützlichkeit zu belegen und sich somit in der Mathematik zu behaupten. Einzige Ausnahme sind *infinitesimale Größen*: Am Anfang der Entwicklung der Differential- und Integralrechnung verwendete man nämlich infinitesimale (also aktual unendlich kleine) Größen. Diese wurden allerdings später durch potentiell unendlich kleine Größen ersetzt bzw. verdrängt.[40]

Georg Cantor glaubte am Anfang seiner Untersuchungen zur Unendlichkeit an die Existenz und Nützlichkeit des aktual unendlich Kleinen. Er ging allerdings davon aus, dass sich unendlich kleine Größen nur mit Hilfe unendlich großer Größen rechtfertigen lassen. Kapitel 15 zeigt, dass er mit dieser Einschätzung recht hatte. Der Beweis geht allerdings nicht auf Georg Cantor, sondern auf den Beweis zur Überabzählbarkeit des geometrischen Kontinuums und somit auf Amir D. Aczel zurück. Entwickelt wurde der Beweis von mir.

Georg Cantor ging im weiteren Verlauf seiner Untersuchungen sogar davon aus, dass es unendlich kleine Größen nicht geben kann und präsentierte dazu einen (aus heutiger Sicht zweifelhaften) Beweis: Zum einen unterstellt er den unendlich kleinen Größen arithmetische Eigenschaften, die zwar im Endlichen gelten, im unendlich Kleinen aber nicht zwangsläufig ebenfalls gelten müssen. Zum anderen bewies er lediglich, dass es keine unendlich kleine Größe $\frac{1}{\omega}$ mit der Eigenschaft $\frac{1}{\omega} * \omega = 1$ geben kann. Diese Tatsache ist korrekt, lässt sich jedoch deutlich einfacher beweisen: In Kapitel 15 haben wir bewiesen, dass $p * \omega$ stets aktual unendlich klein ist und somit u.a. $p*\omega < 0.5$ gilt. Dieser Beweis funktioniert für alle aktual unendlich kleinen Größen, also auch für $\frac{1}{\omega}$. Das bildet jedoch einen Widerspruch.

[40] Unendlich kleine Größen finden wir auch in der Non-Standard-Analysis. Aufgrund der geringen Bedeutung dieser Theorie beschränken wir uns lediglich auf die Erwähnung dieser Tatsache.

Man beachte in diesem Zusammenhang: Die Nichtexistenz der Größe $\frac{1}{\omega}$ stellt kein Widerspruch zur Existenz der Größe p dar, da p wegen $p * c = 1$ am ehesten mit $\frac{1}{c}$ identifiziert werden könnte.

Kapitel „Wer hat wann welche Entdeckungen gemacht?“

Die Informationen stammen überwiegend aus [**Ac02**] und [**Ca32**].

Wer hat wann welche Entdeckungen gemacht?

Die ersten Untersuchungen zur Unendlichkeit fanden zwischen 600 v.Chr. und 200 v.Chr. im antiken Griechenland statt. Allerdings beschränkten sich diese Untersuchungen auf das potentiell Unendlich.

Zwischen 200 v. Chr. und 1640 wurden diese Untersuchungen nicht fortgesetzt, so dass in diesem Zeitraum keine nennenswerten Fortschritte auf dem Gebiet der Unendlichkeitsuntersuchungen erzielt wurden. Erst um 1640 begannen wieder einzelne „Forscher“ sich dem Unendlichen, diesmal aber dem aktual Unendlichen, zuzuwenden. Um diese Zeit wurden die Grundlagen zur Mächtigkeitsuntersuchungen aktual unendlicher Mengen gelegt, aber erst 1850 wurden diese Untersuchungen auf das Kontinuum ausgedehnt.[41]

Um 1870 begann eine neue Ära der Unendlichkeitsuntersuchung. Neben der Entwicklung der Mengentheorie, einer Theorie in der sich die Unendlichkeit erstmals konkret mathematisch untersuchen ließ, wurden Mächtigkeitsunterschiede im Unendlichen nachgewiesen. Außerdem führte die Entdeckung von Antinomien in der naiven Mengenlehre zur Grundlagenkrise in der Mathematik.

Nach Lösung der Grundlagenkrise durch Aufstellung eines (hoffentlich) widerspruchsfreien Axiomsystems für die Mengenlehre

[41] Die gewonnenen Erkenntnisse wurden jedoch größtenteils falsch interpretiert.

um 1900, bildete sich ein neuer Forschungszweig in der Mathematik, der sich ausschließlich mit der inneren Ordnung des Unendlichen, den Ordinal- und Kardinalzahlen, beschäftigt(e).

570–497 v.Chr.	Pythagoras	Entdeckung der Beziehung zwischen den beiden Katheten a und b und der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks: $a^2 + b^2 = c^2$. Entdeckung irrationaler Zahlen durch Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...
490–435 v.Chr.	Zenon von Elea	Untersuchung des potentiell Unendlichen mittels potentiell unendlicher Summen und Aufstellung der drei Zenonschen Paradoxien „Achill und Schildkröte“, „Fliegender Pfeil 1“ und „Fliegender Pfeil 2“.
408–355 v.Chr.	Eudoxos von Knidos	Verwendung infinitesimaler Größen, also unendlich kleiner Zahlen, zur Bestimmung von Strecken, Flächen und Volumina.
384–322 v.Chr.	Aristoteles	Unterscheidung zwischen den Begriffen „Potentiell Unendlich“ und „Aktual Unendlich“.
287–212 v.Chr.	Archimedes	Fortsetzung der Untersuchungen zur Infinitesimalrechnung und „Ersetzung“ der aktual unendlich kleinen Größen durch potentiell unendlich kleine Größen mittels Grenzwertbetrachtungen.

1638	Galileo Galilei	In [**Ga38**]: Entdeckung der vollständigen Paarbildung als geeignetes Mittel zum Mächtigkeitsvergleich. Vergleich der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der Quadratzahlen: Entdeckung, dass eine echte Teilmenge einer unendlichen Menge M gleichmächtig zur Menge M sein kann.
1761	Johann H. Lambert	Beweiß der Irrationalität der Kreiszahl π.
1851	Bernhard Bolzano	In [**Bo51**]: Arithmetischer Beweis der Gleichmächtigkeit einer Geraden der Länge 1 mit einer Geraden der Länge 2 bzw. einer Geraden beliebiger endlicher Länge.
1826–1866	Bernhard Riemann	Geometrischer Beweis der Gleichmächtigkeit einer endlich ausgedehnten Ebene mit einer unendlich ausgedehnten Ebene durch Projektion der Punkte einer Kugeloberfläche auf eine unendlich ausgedehnte Ebene.

1874	Georg Cantor	In [**Ca74**]: Beweis der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen und der algebraischen Zahlen durch Anwendung des „Ersten Cantorschen Diagonalverfahrens“. Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Folgerung der Existenz nicht-algebraischer reeller Zahlen.
1874	Ch. Hermite	In [**He74**]: Beweis der Transzendenz der Eulerschen Zahl $e = 2.718\ldots$
1878	Georg Cantor	In [**Ca78**]: Arithmetischer Beweis der Gleichmächtigkeit einer Geraden mit einer Ebene. Verallgemeinern dieses Ergebnisses auf Räume und andere endliche und sogar abzählbar unendliche Dimensionen. Formulierung der speziellen Kontinuumshypothese: „Es gibt keine Mächtigkeiten zwischen der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit des Kontinuums.“
1879–1884	Georg Cantor	In [**Ca79b**]: Begründung der (naiven) Mengenlehre und der Mannigfaltigkeitslehre.
1882	Ferdinand von Lindemann	In [**Li82**]: Beweis der Transzendenz der Kreiszahl $\pi = 3.141\ldots$.
1888/1889	R. Dedekind und Giuseppe Peano	In [**De88**] und [**Pe89**]: Axiomatisierung der natürlichen Zahlen mittels der Peanoschen Axiome.

1890/1891	Georg Cantor	In [**Ca90**]: Beweis der Existenz beliebig großer Mächtigkeiten durch Anwendung des „Zweiten Cantorschen Diagonalverfahrens“.
1895–1897	Georg Cantor	In [**Ca95**]: Begründung der transfiniten Mengenlehre inklusive Kardinalzahl- und Ordinalzahlarithmetik.
1895–1899	Georg Cantor	Entdeckung der Antinomie der Menge aller Ordinalzahlen, der Menge aller Kardinalzahlen und der Potenzmenge der Menge aller Mengen.
1901	Bertrand Russell	Entdeckung der Russelschen Antinomie, also der Menge aller sich nicht selbst enthaltenden Mengen.
1904	Ernst Zermelo	In [**Ze04**]: Beweis des Wohlordnungssatzes.
1908, 1922	Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel	In [**Ze08b**] und [**Fr22**]: Entwurf des Zermelo-Fraenkel'schen Axiomsystems als Alternative zum Cantorschen Aufbau der Mengenlehre.
1910	L. E. I. Brouwer	In [**Br11**]: Beweis der Unmöglichkeit der stetigen, umkehrbar eindeutigen Abbildung der Punkte von Flächen verschiedener Dimensionen aufeinander und somit der Unmöglichkeit der Existenz eines entsprechenden geometrischen Beweises.

1931	Kurt Gödel	In [**Gö31**]: Beweis der Existenz formal unentscheidbarer Sätze in „hinreichend ausdrucksstarken“ axiomatisierbaren Theorien.
1936	Alan M. Turing	In [**Tu36**]: Begründung des Berechenbarkeitsmodells der Turingmaschinen und Beweis der Nichtentscheidbarkeit des Halteproblems.
1938	Kurt Gödel	In [**Gö38**]: Beweis der Nichtwiderlegbarkeit des Auswahlaxioms[42] in der ZF-Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel'schen Axiomsystems) und der Kontinuumshypothese in der ZFC-Mengenlehre (ZF-Mengenlehre inklusive Auswahlaxiom).
1963	Paul Cohen	In [**Co63**]: Beweis der Nichtbeweisbarkeit des Auswahlaxioms in der ZF-Mengenlehre und der Kontinuumshypothese in der ZFC-Mengenlehre.
1993	Zwicker	In [**Sm93**]: Entdeckung der Zwisckerschen Antinomie als mengentheoretisches Äquivalent zum Halteproblem der Turingmaschinen.
2000	Amir D. Aczel	In [**Ac02**]: Beweis der Überabzählbarkeit des geometrischen Kontinuums.

[42] Auf das Auswahlaxiom wurde aus Gründen der Vereinfachung in diesem Buch nicht eingegangen. Dennoch haben wir unbewusst an einigen Stellen indirekt davon Gebrauch gemacht. Es gilt: Auswahlaxiom und Wohlordnungssatz sind äquivalent. Weder Wohlordnungsatz, noch Auswahlaxiom sind im ZF-Axiomsystem beweisbar. Im ZF-Axiomsystem zuzüglich Auswahlaxiom lässt sich der Wohlordnungsatz beweisen. Im ZF-Axiomsystem zuzüglich Wohlordnungsaxiom lässt sich der Auswahlsatz beweisen. Der Vollständigkeitssatz lässt sich nur unter Anwendung des Wohlordnungssatzes/-axioms bzw. Auswahlsatzes/-axioms beweisen.

Gibt es noch andere Literatur zum Thema Unendlichkeit?

[Ca74] Georg Cantor. *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* Crelles Journal für Mathematik, Band 77, 1874, Seite 258–262.

[Ca78] Georg Cantor. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Crelles Journal für Mathematik, Band 84, 1878, Seite 242–258.

[Ca79a] Georg Cantor. *Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten.* Nachr. v. d. Kön. Ges. d. Wiss. u. d. Georg-Augusts-Universität, 1879, Seite 127–135.

[Ca79b] Georg Cantor. *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten.* Mathematische Annalen, Band 15, 1879, Seite 1–7; Band 17, 1880, Seite 355–358; Band 20, 1882, Seite 113–121; Band 21, 1883, Seite 51–58 und 545–586; Band 23, 1884, Seite 453–488.

[Ca85] Georg Cantor. *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten Raum G_n.* Acta Mathematica, Band 7, 1885, Seite 105–124.

[Ca86] Georg Cantor. *Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktuale Unendliche.* Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik, Band 88, 1886, Seite 224–233.

[Ca87] Georg Cantor. *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.* Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik, Band 91, 1887, Seite 81–125 und 252–270; Band 92, 1888, 240–265.

[Ca90] Georg Cantor. *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung, Band 1, 1890/91, Seite 75–78.

[Ca95] Georg Cantor. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Mathematische Annalen, Band 46, 1895, Seite 481–512; Band 49, 1897, Seite 207–246.

[Ca03] Georg Cantor. *Bemerkungen zur Mengenlehre.* Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung, Band 12, 1903, Seite 519.

[Ca32] Georg Cantor. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Hrgs. E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf

Cantors von A. Fraenkel. Springer Verlag, Berlin 1932, Neudrucke: Hildesheim 1962, Berlin Heildelberg New York 1980. ISBN 3-540-09849-6 / 0-387-09849-6.

[Ca91] Georg Cantor. *Briefe.* Hrsg. Herbert Meschkowski und Winfried Nilson. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York ... 1991, ISBN 3-540-50621-7.

[Ze04] Ernst Zermelo. *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.* Mathematische Annalen, Band 59, 1904, Seite 514–516.

[Ze08a] Ernst Zermelo. *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.* Mathematische Annalen, Band 65, 1908, Seite 107–128.

[Ze08b] Ernst Zermelo. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.* Mathematische Annalen, Band 65, 1908, Seite 261–281.

[Br11] L. E. J. Brouwer. *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl.* Mathematische Annalen, Band 70, 1911, Seite 161–165.

[Fr22] Abraham Fraenkel. *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre.* Mathematische Annalen, Band 86, 1922, Seite 230–237.

[Ze30] Ernst Zermelo. *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlage der Mengenlehre.* Fundamenta mathematicae, Band 16, 1930, Seite 29–47.

[Gö38] Kurt Gödel. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Band 24, 1938, Seite 556–557.

[Co63] P. J. Cohen. *The Independence of the Continuum Hypothesis.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Band 50, 1963, Seite 1143–1148; Band 51, 1964, 105–110.

[Ga38] Galileo Galilei. *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige.* Abhandlung, 1638.

[Bo51] Bernhard Bolzano. *Paradoxien des Unendlichen.* Leipzig 1851. Neudrucke: Darmstadt 1964, Hamburg 1975.

[He74] Ch. Hermite. *Sur la fonction exponentielle.* Paris 1874.

[Li82] Ferdinand Lindemann. *Ueber die Zahl π.* Mathematische Annalen, Band 20, 1882, Seite 213–225.

[De88] R. Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig 1888.

[Pe89] Giuseppe Peano. *Arithmetices principa, nova methodo exposita.* Turin 1889.

[Hi26] David Hilbert. *Über das Unendliche.* Mathematische Annalen, Band 95, 1926, Seite 161–190.

[Gö31] Kurt Gödel. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.* Monatshefte für Mathematik und Physik, Band 38, 1931, Seite 173–198.

[Tu36] Alan M. Turing. *On computable numbers. With an application to the Entscheidungsproblem* Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, 42, 1936.

[Br92] Elke Brendel. *Die Wahrheit über den Lügner. Eine philosophisch-logische Analyse der Antinomie des Lügners.* de Gruyter, 1992.

[Sm93] Raymond M. Smullyan. *Satan, Cantor und die Unendlichkeit. Und 200 weitere verblüffende Tüfteleien.* Birkenhäuser, 1993 / Insel Taschenbuch, Frankfurt 1997, ISBN 3-458-33599-4.

[He98] Klaus von Heusinger. *Antinomien. Zur Behandlung von semantischen Paradoxien, ihren Risiken, Nebenwirkungen und Unverträglichkeiten.* Linguistische Berichte 173, 1998, 3–41.

[Ac02] Amir D. Aczel. *Die Natur der Unendlichkeit. Mathematik, Kabbala und das Geheimnis des Aleph.* Rowohlt Taschenbuch, Oktober 2002, ISBN 3-499-61358-1.

[De04] Oliver Deiser. *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo.* Springer Verlag, Berlin 2004, ISBN 3-540-20401-6 / 978-3-540-20401-5 / 3-540-42948-4.

[Ki07] Rudolf Kippenhahn. *Eins, zwei, drei... unendlich. Eine Reise an die Grenzen der Mathematik.* Piper Verlag, München 2007, ISBN 978-3-492-04907-8.

Diese Auflistung umfasst die für dieses Buch wichtigsten Arbeiten. Für eine deutlich umfassendere Auflistung von Literatur zum Thema Unendlichkeit und Mengenlehre sei auf [**De04**] verwiesen.

Hiermit danke ich Herrn Prof. Reinhard Thron für seine Hilfe bei der Ordnung meiner Gedanken und Ideen zum Thema Unendlichkeit, Antinomie und Beweistheorie. Ich weiß, da musste teilweise viel geordnet werden. ;-)

Außerdem geht ein großer Dank an Herrn Prof. Ludwig Staiger, der uns Studenten mit der Theoretischen Informatik „quälte“, aber dadurch mein Interesse an theoretischen Konzepten weckte und maßgeblich an der Entwicklung meiner Fähigkeiten zum Verständnis und zur Durchführung kompliziertester Beweise der Theoretischen Informatik und Mathematik beteiligt war.

Und nicht zu vergessen an dieser Stelle: Danke Herr Prof. Wolf Zimmermann, dass Sie uns Hausaufgaben stellten, von denen Sie genau wussten, dass diese nicht von gewöhnlichen Studenten zu lösen sind.

Danken möchte ich außerdem der GISA GmbH, meinem Arbeitgeber: Danke, dass ich als SAP-Anwendungsentwickler die Möglichkeit habe, meine Vorliebe für kniffelige theoretische Probleme auszuleben und praktisch zu nutzen.[43]

[43] These: Nur ein guter Theoretiker ist ein guter Anwendungsentwickler. Begründung: Die Hauptaufgaben eines Anwendungsentwicklers sind theoretischer Natur: Identifiziere ein kompliziertes Problem. Analysiere und vereinfache das Problem. Finde einen hochinnovative Lösung des Problems. Vereinfache und verallgemeinere die Lösung. Beweise die Vollständigkeit und Korrektheit der Lösung. Realisiere die Lösung in absolut höchster Qualität.

Abschließend danke ich meiner lieben Schwester Susanne Weigel: Danke, dass du auch weiterhin ab und zu mit mir ein Käffchen trinken gehen wirst, auch wenn du als angehende germanistische Literaturwissenschaftlerin und interkulturelle Wissenskommunikationsfachfrau mit diesem Buch nichts anfangen kannst. . .

Zum Autor: Peter Weigel wurde am 27. August 1979 in Halle an der Saale geboren. Er studierte von 1999 bis 2004 Informatik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Vertiefungsrichtung Theoretische Informatik) und ist seit 2005 bei der GISA GmbH als SAP-Anwendungsentwickler bzw. seit 2010 als Prozess- und IT-Berater für den SAP Solution Manager tätig.